

II-12. ベキ乗則および対数則流速分布式に関する考察

日本大学工学部 正員 安田 禎 輔

まえがき 層流の内部摩擦はNewtonの粘性の法則によって示される。乱流においては運動量輸送理論による Reynolds 応力： $\tau = -\rho u'v'$ によって表される。しかしこの Reynolds 応力は理論的に求められないので、流速分布式を理論的に求めることはできない。したがって乱流の流速分布式を求めるには、直接この分布曲線を仮定するか、Prandtl が行ったように混合距離を仮定し Reynolds 応力を具体的に表すなどして求めることになる。前者の方法による式がベキ乗（ $1/7$ 乗）則であり、後者が対数則分布式である。内部摩擦応力や流速分布式には幾つかの条件がある。本報ではこれらの式が本条件を満たしているかどうかなどについて考察する。

1. 円管内流速分布条件

Fig. 1 は管内流速分布の模式図である。流速分布の対称性と内部摩擦応力の分布条件とより、流速分布曲線は次の条件、

$$\textcircled{1} \quad r=0 \quad \text{で} \quad u=u_{\max}$$

$$r=r_0 \quad \text{で} \quad u=u_{\min}$$

$$\textcircled{2} \quad r=0 \quad \text{で} \quad du/dr = 0$$

$$\textcircled{3} \quad r=r_0 \quad \text{で} \quad du/dr = \text{有限}$$

を満たしていなければならない。

Newtonの粘性の法則による層流の流速分布式は本条件を満たすが、乱流における対数則およびベキ乗（ $1/7$ 乗）則分布式は本条件を満たしていない。

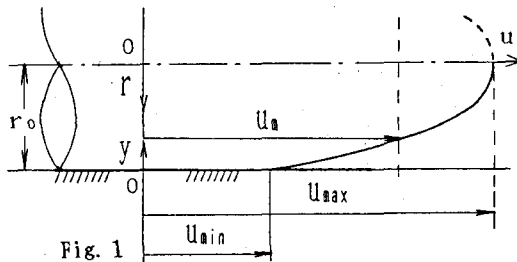


Fig. 1

平均流速が小さいか層流における場合には、 $u_{\min} \approx 0$ と考えてもさしつかえない。しかし、平均流速が大きい場合には、たとえ滑面乱流の場合でも $u_{\min} \neq 0$ とみなした方が、流速分布全体を表現するには好都合である。もちろん粘性底層の存在を認めるならば、当然 $u_{\min} = 0$ と考えるべきであろうが、この場合でも一般には粘性底層の厚さは管径に比べて非常に小さいので、これを無視しても流速分布曲線、平均流速、壁面抵抗などが大きく変わるわけではない。したがって、壁面近傍の微視的現象を考察するとき以外はこれを無視し、問題を単純化し

て考えた方が得策である。

2. ベキ乗（ $1/7$ 乗）則流速分布式

Fig. 2 は Fig. 1 の座標を半径と最大流速で無次元表示したものである。本図でも流速分布条件①～③を満たししなければならないのは当然である。Prandtl および Karman は Fig. 2 のように整理された Nikuradse の実験結果、Stanton-Parnell の実験結果 $V/u_{\max} \approx 0.8$ および Blasius の式 $f = 0.3164/Re^{1/4}$ とから、次に示す2つの仮定により $1/7$ 乗則流速分布式（2）を提案した。

すなわち、① Fig. 2 の曲線を $u_{\min} = 0$ とし、偏曲点（頂点）が壁面にある n 次曲線とみなし、 $y/r_0 = (u/u_{\max})^n$ とした。

$$\frac{u}{u_{\max}} = \left(\frac{y}{r_0} \right)^{1/n} \quad \dots (1)$$

② 管壁近傍の流速は管径に無関係であるとして

$$\frac{u}{u_{\max}} = \left(\frac{y}{r_0} \right)^{1/7} \quad \dots (2)$$

を提案した。さて、以上の仮定および式について考察してみると以下の通りとなる。

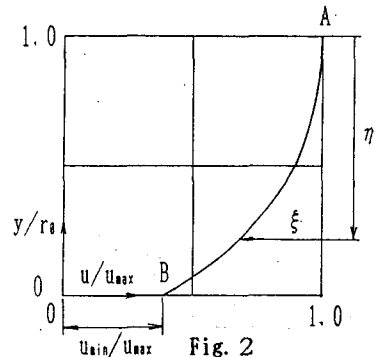


Fig. 2

仮定 ①: この仮定によると, 管軸 $r=0$ で速度勾配 du/dy がゼロとならず, 流速分布は管の中心で不連続となり流速分布条件②にも反する. また, $n>1$ なることから明かなように, du/dy は管壁 $y=0$ で無限大となり流速分布条件③にも反する.

仮定 ②: (1) または (2) 式は管の中央部の流速分布式として提案されているにもかかわらず, その指数 n は管壁近傍の近似条件から $n=7$ と決定しているので論理的でない. また, 平均流速の大小にかかわらず常に $u_{min}=0$ としているので速度欠損則は成立しないことになる. 欠損則は必ずしも成立するとは限らないとは思いますが, 同じような領域の流れでは近似的に成立するものと考えられる. 以上の事柄より従来のベキ乗則には矛盾が多過ぎる.

3. 対数則流速分布式

Prandtl は混合距離の仮定と運動量輸送理論により, 乱流における内部摩擦抵抗の式として次式

$$\tau = \rho l^2 \left(\frac{du}{dy} \right)^2 \quad \dots (3)$$

を提案し,

$$l = k y \quad \dots (4)$$

$$\tau \doteq \tau_0 \quad \dots (5)$$

と仮定し, (3) 式より次の流速分布式を提案した.

滑面乱流

$$\frac{u}{v_*} = \frac{1}{k} \ln \frac{v_* y}{\nu} + A_s \quad \dots (6)$$

粗面乱流

$$\frac{u}{v_*} = \frac{1}{k} \ln \frac{y}{\epsilon} + A_r \quad \dots (7)$$

本式は壁面近傍の条件, (4) および (5) 式の条件で解いたが, 壁面近傍では成立せず $u=-\infty$ となり矛盾が生じる. しかし, Nikuradse の実験結果より $A_s=5.5$, $A_r=8.5$ とすると, 壁面近傍をのぞき管中央部で実験結果と比較的良好合うので, これらの式を管中央部の流速分布則として採用している. 壁面近傍の条件で求められた式が, 壁面近傍で成立せず管中央部で実験結果と近似的に合うからと云って, 本式の合理性を裏付けるものではない.

粗滑いずれの式も

$$\frac{du}{dy} = \frac{v_*}{k} \frac{1}{y} \quad \dots (8)$$

となる. (3) 式に (4) および (8) 式を代入し

て内部摩擦応力を求めてみると

$$\tau = \rho v_*^2 = \rho g R I = \tau_0$$

となり, τ は断面全体で一定となる矛盾が生じる.

この矛盾は流速分布式の誘導過程から当然生じることはあるが, 理論的にはこの応力分布は直線分布となり, 次式で示される.

$$\tau = \frac{1}{2} \rho g l r = \frac{1}{2} \rho g l (r_0 - y)$$

これらの関係を Fig. 3 に示す.

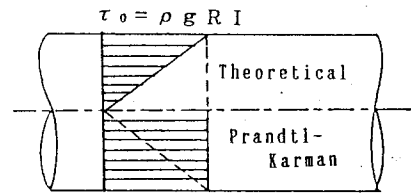


Fig. 3

du/dy は管軸でゼロとならず, 管の中心で流速分布は不連続となり, 流速分布条件②に反する.

以上のように, 対数則流速分布式にも多々不合理な点が存在する.

4. ベキ乗型流速分布式の提案

従来のベキ乗型流速分布式の不合理性についてはすでに述べてきた通りであるが, その最大の欠点は n 次曲線の偏曲点 (頂点) が壁面上の原点 ($u_{min}=0$) にあるとした点である.

Fig. 1~2 または流速分布条件①~③からも明らかなように, もし流速分布式を n 次曲線と仮定するならばその偏曲点 (頂点) は管の中心になければならない. したがって, 分布曲線は Fig. 2 より

$$\xi = \left(1 - \frac{u_{min}}{u_{max}} \right) \eta^n$$

$$\therefore u = u_{max} - (u_{max} - u_{min}) \left(1 - \frac{y}{r_0} \right)^n$$

or

$$u = u_{max} - (u_{max} - u_{min}) \left(\frac{r}{r_0} \right)^n \quad \dots (9)$$

$$= u_{min} + (u_{max} - u_{min}) \left\{ 1 - \left(\frac{r}{r_0} \right)^n \right\} \quad \dots (10)$$

となる. 本式は当然流速分布条件①~③を満足する.

なお, 紙数の関係上要約は講演に報告の予定.