Ⅰ－17　応力・モーメントテンソルの高次元化に関する考察

東北大学工学部　正員　佐武正雄

1．まえがき

応力や，梁・板の断面に生じるモーメントは，考えている構造体と同じ次元のテンソルとして記述されている。しかし，平衡条件を考慮するとき，物体力やせん断力もそのテンソルに含め，一つ次元の高いテンソルとして取り扱うと，平衡条件の記述を単純化することができる。本文では，このように高次元化した応力テンソル，モーメントテンソルについて説明し，その性質について考察する。

2．応力テンソルの高次元化

2D（2次元）で説明する。応力に関する平衡条件式は周知のように

$$\left.\begin{aligned}\partial_x\sigma_x + \partial_y\tau_{xy} + f_x &= 0\\ \partial_x\tau_{xy} + \partial_y\sigma_y + f_y &= 0\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

と記される。ここに $\underset{\sim}{\sigma} = \begin{pmatrix}\sigma_x & \tau_{xy}\\ \tau_{xy} & \sigma_y\end{pmatrix}$ は通常の応力テンソル，$\underset{\sim}{f} = (f_x, f_y)^T$ は物体力で，$\underset{\sim}{\nabla} = (\partial_x, \partial_y)^T$ はベクトル微分演算子である。ここで，新たに座標 h を付加し，高次元化した応力テンソル

$$\underset{\sim}{\overset{*}{\sigma}} = \begin{pmatrix}\sigma_x & \tau_{xy} & hf_x\\ \tau_{xy} & \sigma_y & hf_y\\ hf_x & hf_y & -\frac{h^2}{2}s\end{pmatrix} \qquad (2)$$

を定義する。ただし

$$s = \partial_x f_x + \partial_y f_y = \underset{\sim}{\nabla}\cdot\underset{\sim}{f} \qquad (3)$$

である。高次元化したベクトル微分演算子

$$\underset{\sim}{\overset{*}{\nabla}} = (\partial_x, \partial_y, \partial_h)^T \qquad (4)$$

を導入すれば，式(1)，(3)は単純に

$$\underset{\sim}{\overset{*}{\nabla}}\cdot\underset{\sim}{\overset{*}{\sigma}} = 0 \qquad (5)$$

と記述される。3D（3次元）の場合も全く同様である。

3．モーメントテンソルの高次元化

やはり2Dで説明する。板の撓みをwとするとき，板のモーメントは，通常

$$\underset{\sim}{M} = \begin{pmatrix}M_x & M_{xy}\\ M_{xy} & M_y\end{pmatrix} = -\{D(1-\nu)\underset{\sim}{\nabla}\underset{\sim}{\nabla} + \nu\Delta\underset{\sim}{I}\}w \qquad (6)$$

と記述される。ここに，Dは板の曲げ剛性，νはポアソン比，$\Delta = \underset{\sim}{\nabla}\cdot\underset{\sim}{\nabla}$はラプラシアン，$\underset{\sim}{I}$は単位テンソルである。モーメントに関する平衡条件式は，せん断力$\underset{\sim}{Q} = (Q_x, Q_y)^T$，分布荷重pを用い，

$$\left.\begin{aligned}\partial_x M_x + \partial_y M_{xy} - Q_x &= 0\\ \partial_x M_{xy} + \partial_y M_y - Q_y &= 0\\ \partial_x Q_x + \partial_y Q_y + p &= 0\end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

と記述される。したがって，前と同様に

$$\underset{\sim}{\overset{*}{M}} = \begin{pmatrix}M_x & M_{xy} & -hQ_x\\ M_{xy} & M_y & -hQ_y\\ -hQ_x & -hQ_y & -\frac{h^2}{2}p\end{pmatrix} \qquad (8)$$

と定義すれば，式(7)は

$$\underset{\sim}{\overset{*}{\nabla}}\cdot\underset{\sim}{\overset{*}{M}} = 0 \qquad (9)$$

と記すことができる。はり（1D）の場合は

$$\underset{\sim}{\overset{*}{M}} = \begin{pmatrix}M & -hQ\\ -hQ & -\frac{h^2}{2}p\end{pmatrix} \qquad (10)$$

となる。Borg[1)]は，式(8)のような高次元化モーメントテンソルと3D応力テンソルとのアナロジーに着目し，その応用について考察している。

4．考察

(1) ひずみと曲率テンソルの高次元化

高次元化応力に対応するひずみは，次のようにして導入するのが適当と考えられる。

$$\underset{\sim}{\overset{*}{\varepsilon}} = \frac{1}{2}(\underset{\sim}{\overset{*}{\nabla}}\underset{\sim}{\overset{*}{u}} + \underset{\sim}{\overset{*}{u}}\underset{\sim}{\overset{*}{\nabla}}) \qquad (11)$$

ここに

$$\underset{\sim}{\overset{*}{u}} = \left(u_x, u_y, \frac{2\varphi}{h}\right)^T \qquad (12)$$

$\overset{*}{\nabla}$は式(4)で与えられるベクトル演算子，$\underset{\sim}{\overset{*}{u}}$は変位ベクトル $\underset{\sim}{u} = (u_x, u_y)^T$ を高次元化したもので，φは変位ベクトルのポテンシャルに相当する量である。通常のひずみを

$$\underset{\sim}{\varepsilon} = \begin{pmatrix}\varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy}\\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \partial_x u_x, & \frac{1}{2}(\partial_x u_y + \partial_y u_x) \\ \frac{1}{2}(\partial_x u_y + \partial_y u_x), & \partial_y u_y \end{pmatrix} \tag{13}$$

とすれば，

$$\overset{*}{\underset{\sim}{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & h^{-1}\partial_x\varphi \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & h^{-1}\partial_y\varphi \\ h^{-1}\partial_x\varphi & h^{-1}\partial_y\varphi & -2h^{-2}\varphi \end{pmatrix} \tag{14}$$

となる。

$$\underset{\sim}{u} = \underset{\sim}{\nabla}\varphi = (\partial_x\varphi,\ \partial_y\varphi)^T \tag{15}$$

とおける場合は

$$\overset{*}{\underset{\sim}{\varepsilon}} = \left(\begin{array}{c|c} \underset{\sim}{\varepsilon} & h^{-1}\underset{\sim}{\nabla}\varphi \\ \hline h^{-1}\underset{\sim}{\nabla}^T\varphi & -2h^{-2}\varphi \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \underset{\sim}{\varepsilon} & h^{-1}\underset{\sim}{u} \\ \hline h^{-1}\underset{\sim}{u}^T & -2h^{-2}\varphi \end{array}\right) \tag{16}$$

となる。$\overset{*}{\underset{\sim}{\sigma}}$と$\overset{*}{\underset{\sim}{\varepsilon}}$のする仕事を考えれば，

$$W = \overset{*}{\underset{\sim}{\sigma}}\cdot\cdot\overset{*}{\underset{\sim}{\varepsilon}} = \underset{\sim}{\sigma}\cdot\cdot\underset{\sim}{\varepsilon} + 2\underset{\sim}{f}\cdot\underset{\sim}{u} + s\varphi \tag{17}$$

となる。また当然，適合条件

$$\overset{*}{\underset{\sim}{\nabla}}\overset{*}{\underset{\sim}{\nabla}} \times\times \overset{*}{\underset{\sim}{\varepsilon}} = 0 \tag{18}$$

が成立する。同様に曲率テンソルについては，高次元化した撓み角ベクトル

$$\overset{*}{\underset{\sim}{\theta}} = \left(\theta_x,\ \theta_y,\ \frac{2w}{h}\right)^T \tag{19}$$

を導入し，

$$\overset{*}{\underset{\sim}{\kappa}} = \frac{1}{2}(\overset{*}{\underset{\sim}{\nabla}}\overset{*}{\underset{\sim}{\theta}} + \overset{*}{\underset{\sim}{\theta}}\overset{*}{\underset{\sim}{\nabla}}) \tag{20}$$

によって高次元曲率テンソルを定義する。$\underset{\sim}{\theta} = (\theta_x, \theta_y)^T$ は通常の撓み角ベクトル，wは撓みである。通常の曲率テンソルを

$$\underset{\sim}{\kappa} = \begin{pmatrix} \kappa_x & \kappa_{xy} \\ \kappa_{xy} & \kappa_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_x\theta_x & \frac{1}{2}(\partial_x\theta_y + \partial_y\theta_x) \\ \frac{1}{2}(\partial_x\theta_y + \partial_y\theta_x) & \partial_y\theta_y \end{pmatrix} \tag{21}$$

とすれば，

$$\overset{*}{\underset{\sim}{\kappa}} = \begin{pmatrix} \kappa_x & \kappa_{xy} & h^{-1}\partial_x w \\ \kappa_{xy} & \kappa_y & h^{-1}\partial_y w \\ h^{-1}\partial_x w & h^{-1}\partial_y w & -2h^{-2}w \end{pmatrix} \tag{22}$$

となる。通常

$$\underset{\sim}{\theta} = \underset{\sim}{\nabla}w = (\partial_x w,\ \partial_y w)^T \tag{23}$$

とおくことができるから

$$\overset{*}{\underset{\sim}{\kappa}} = \left(\begin{array}{c|c} \underset{\sim}{\kappa} & h^{-1}\underset{\sim}{\nabla}w \\ \hline h^{-1}\underset{\sim}{\nabla}^T w & -2h^{-2}w \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \underset{\sim}{\kappa} & h^{-1}\underset{\sim}{\theta} \\ \hline h^{-1}\underset{\sim}{\theta}^T & -2h^{-2}w \end{array}\right) \tag{24}$$

となり，仕事として

$$W = \overset{*}{\underset{\sim}{M}}\cdot\cdot\overset{*}{\underset{\sim}{\kappa}} = \underset{\sim}{M}\cdot\cdot\underset{\sim}{\kappa} - 2\underset{\sim}{Q}\cdot\underset{\sim}{\theta} + pw \tag{25}$$

を得る。また，適合条件

$$\overset{*}{\nabla}\overset{*}{\nabla} \times\times \overset{*}{\kappa} = 0 \tag{26}$$

が成立する。

(1) エアリー関数

1Dの場合，高次元化によって2Dのテンソルとなる。たとえば，モーメントテンソルは

$$\overset{*}{\underset{\sim}{M}} = \begin{pmatrix} M, & -Qh \\ -Qh, & -\frac{1}{2}ph^2 \end{pmatrix} \tag{27}$$

である。この場合，エアリー関数は

$$\chi = \frac{1}{2}h^2 M \tag{28}$$

であり，

$$\overset{*}{\underset{\sim}{M}} = \begin{pmatrix} \partial_{hh} & -\partial_{xh} \\ -\partial_{xh} & \partial_{xx} \end{pmatrix}\chi \tag{29}$$

と記すことができる。

5. あとがき

以上，応力及びモーメントテンソルの高次元化について考察した。このような高次元化を行うことにより，これらの量の力学的意味を一般化し，統一的な取扱いが可能となると思われ，さらに研究をすすめたいと考えている。

参考文献

1) S.F.Borg : Matrix-Tensor Methods in Continuum Mechanics, D.van Nostrand (1963), 226-231