

I-16

分布微視クラックを内在する材料の力学特性のモデル化

東北大学大学院 学生員 ○仲沢 武志
東北大学工学部 正 員 佐武 正雄
東北大学工学部 正 員 岸野 佑次

1. まえがき プロセスゾーンのモデル化においては、その中の微視クラックが巨視的力学特性に及ぼす影響を考察することが重要である。そこで、微視クラックの力学的効果をEshelbyの楕円体介在物法による固有ひずみで評価し、微視クラックの空間分布を表現するクラックテンソルとの対応づけを行った¹⁾。さらに、擬似応力の考え方²⁾を導入し、クラック間の力学的相互作用を考察する。本文は、その概要を示したものである。

2. 楕円体介在物法による微視クラックの力学的表現とクラックテンソルとの関係

図-1のような等方弾性体内の2次元スリット状クラックに対する領域面積Aへの平均的な固有ひずみ ε_{ij}^* は、クラックテンソルを

$$F_{ij} = \frac{2\pi}{A} \sum_{\alpha} a_{\alpha}^2 n_{i\alpha} n_{j\alpha} \quad (1)$$

と定義すれば、平面応力状態に対して次式のように表される。

$$\varepsilon_{ij}^* = L_{ijkl} \sigma_{kl} \quad (2)$$

ここに、Eは母材のヤング率、 $2a_{\alpha}$ はクラックの長さ、 $n_{i\alpha}$ はクラック面法線ベクトルを示す。ただし、母材は等方材料とする。

3. 微視クラックを考慮したコンプライアンス

微視クラックを考慮したコンプライアンスを次式のように考える。

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^0 + \varepsilon_{ij}^* = (D_{ijkl} + L_{ijkl}) \sigma_{kl} \quad (3)$$

ここに、 ε_{ij}^0 は弾性ひずみ、 D_{ijkl} は母材の弾性コンプライアンス

$$D_{ijkl} = -\frac{\nu}{E} \delta_{ij} \delta_{kl} + \frac{1+\nu}{E} \delta_{ik} \delta_{jl} \quad (4)$$

である。以下に、4階のテンソル L_{ijkl} について考察する。

(1) クラック間の力学的相互作用を考慮しない場合¹⁾

クラック間の力学的相互作用を考慮しない場合、クラック面上の応力条件は、 $n_i (\sigma_{ij} + \sigma_{ij}^*) = 0$ となり、4階のテンソル L_{ijkl} はクラックテンソルの対称性を考慮して次式ようになる。

$$L_{ijkl} = \frac{1}{2E} (F_{ik} \delta_{jl} + F_{jk} \delta_{il}) \quad (5)$$

ここに、 σ_{ij}^* は固有ひずみに対応する応力である。

(2) クラック間の力学的相互作用を考慮する場合³⁾

クラック間の力学的相互作用を考慮したコンプライアンスについて考察するために、擬似応力の考え方を導入する。この場合、クラック面上の応力条件は擬似応力 $\bar{\sigma}_{ij}$ を考慮して、 $n_i (\sigma_{ij} + \sigma_{ij}^* + \bar{\sigma}_{ij}) = 0$ となる。ここで、擬似応力を次式のように、クラックテンソルと外力の関数であるとする。

$$\bar{\sigma}_{ij} = \bar{\sigma}_{ij}^0 (F_{kl}, \sigma_{mn}) \quad (6)$$

簡単のため、クラックテンソルと外力に対して、1次の項のみ考慮し、さらに、擬似応力がクラック面上の応力ベクトルに比例するものとすれば、比例定数bを用いて、式(6)は次式のように展開できる。

$$\bar{\sigma}_{ij} = b (F_{ik} \delta_{jl} + F_{jk} \delta_{il}) \sigma_{kl}$$

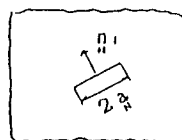


図-1 スリット状クラック

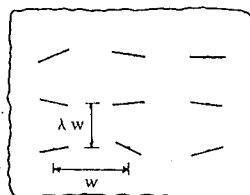


図-2 クラックの配置

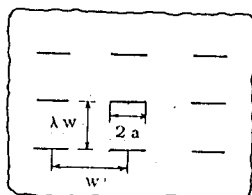


図-3 規則的配列のクラック

これより、クラック間の力学的相互作用を考慮した場合の4階のテンソル L_{ijkl} は、次式ようになる。

$$L_{ijkl} = \frac{1}{2E} \{ (F_{ik}\delta_{jl} + F_{jk}\delta_{il}) + b(F_{im}F_{mk}\delta_{jl} + F_{jm}F_{mk}\delta_{il} + F_{il}F_{jk} + F_{jl}F_{ik}) \} \quad (7)$$

4. 擬似応力に対する比例定数の考察

式(7)における比例定数 b について考察する。クラック間の力学的相互作用の影響によって生ずる擬似応力ベクトルが、クラック相互の距離に比例するものとする。すなわち、

$$T_i = \left(\frac{a}{d}\right)^2 T_i = \left(\frac{a}{d}\right)^2 \sigma_{ij} n_j \quad (8)$$

また、擬似応力を次式のように計算する。

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{2} \sum_k \left(\frac{a}{d}\right)^2 (T_i n_j + T_j n_i) = \frac{1}{2} \sum_k \left(\frac{a}{d}\right)^2 (n_i n_k \delta_{jl} + n_j n_k \delta_{il}) \sigma_{ki} \quad (9)$$

さらに、クラック相互の距離は、図-2のようにクラックが位置する場合について考える。擬似応力に対して、着目しているクラックの周辺に位置するクラックの影響は大きい、遠方のクラックの影響は小さいと考えられることから、簡単のために、クラックの周辺の影響のみ考慮する。この場合、クラック相互の距離を表すパラメータ $(a/d)^2$ は次式のように計算される。

$$\left(\frac{a}{d}\right)^2 = \frac{a^2}{\lambda w^2} \left[\frac{(\lambda^4 + 4\lambda^2 + 1)}{\lambda(1 + \lambda^2)} \right] \quad (10)$$

式(10)を式(9)に代入し、クラックテンソルの定義を考慮すれば、擬似応力は、次式のように計算される。

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{(\lambda^4 + 4\lambda^2 + 1)}{\lambda(1 + \lambda^2)} \right] (F_{ik}\delta_{jl} + F_{jk}\delta_{il}) \quad (11)$$

よって、式(7)における比例定数 b は、次式のように求められる。

$$b = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{(\lambda^4 + 4\lambda^2 + 1)}{\lambda(1 + \lambda^2)} \right] \quad (12)$$

5. 簡単な例題への適用

簡単な例題として、図-3のような規則的にクラックがある場合に適用する。このような場合、クラック法線方向の弾性係数、せん断弾性係数は、母材のそれらに対する比として次式のように求められる。

$$\frac{\bar{E}}{E} = \frac{1}{1 + \frac{2\pi a^2}{\lambda w^2} \left[1 + b \frac{\pi a^2}{\lambda w^2} \right]} \quad \frac{\bar{G}}{G} = \frac{1}{1 + \frac{2\pi a^2}{\lambda w^2} \left(\frac{G}{E} \right) \left[1 + \frac{b}{2} \frac{\pi a^2}{\lambda w^2} \right]} \quad (13)$$

式(13)において $\lambda = 1$ としたものを、同様なクラック配置に対する堀井等のセルフコンシステント法による解とともに図-4に示す。

6. あとがき 微視クラックによる微視構造をクラックテンソルで表現し、それを考慮した構成則について考察し、簡単な例題に適用した。

参考文献

- 1) 仲沢、佐武：クラックテンソルによる微視クラックの表現とその応用、第22回岩盤力学に関するシンポジウム講演論文集、1990
- 2) K.Sahasakmontri, H.Horii, A.Hasegawa and F.Nishino: "Mechanical Properties of Solids Containing a Doubly Periodic Rectangular Array of Cracks", Structural Eng./Earthquake Eng., Proc. of JSCE Vol.4, No.1, 1987
- 3) 仲沢、佐武、岸野：クラックテンソルによるクラック間の力学的相互作用の考察、土木学会第44回年次学術講演会講演集、1989

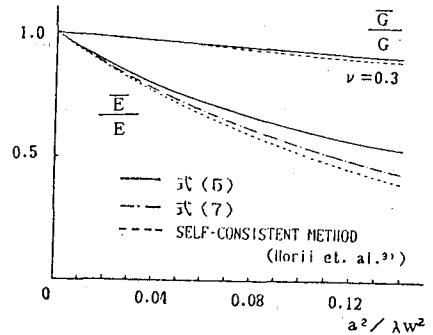


図-4 クラック密度に対する弾性係数の変化