

I-10 逐次近似手法による動的な高次平板理論の特性

福島工業高等専門学校 正 員 ○ 根岸嘉和
同 学生員 遠藤隆行

① 緒 言 本報告では、先に提案したような定式化手法^{1), 2)}、すなわち3次元弾性論の基礎式を逐次近似的に満足させていく定式化手法を用いて、動的な平板の高次理論を、曲げ挙動³⁾のみならず伸縮挙動に対しても構築し、その理論特性を明かにするとともに、無限板中を伝播する平面調和波の分散解析を実施して解析精度特性について検討する。なお解析対象は等方性等厚板の線形問題に限定する。

② 理論式の誘導

Fig. 1 に示すように動的横荷重を受けた平板の挙動を(1)曲げ挙動と(2)伸縮挙動に分解し、各状態ごとに物理量の板厚方向分布の対称性・逆対称性を考慮し、上下表面の応力境界条件(S. B. C)を満足させながら、逐次、3次元弾性論の基礎式を用いて高次の理論式を誘導していく。この定式化手順は曲げ、伸縮ともに Fig. 2 の流れ図で与えられ、ここでは、定式化の出発点となる初期値を、双方の場合についてともに $e_{xz}^{(0)} = 0$, $\sigma_{xz}^{(0)} = 0$, $\sigma_{zz}^{(0)} = 0$ と設定し、以降、前の段階で求めた値を基にして逐次高次の理論式を定式化していくことによって、自由表面を有する平板の動的支配式を誘導した。この結果、曲げ挙動の1次理論はGermain-Lagrangeの動的な古典平板曲げ理論に一致するものとなり、伸縮挙動の1次理論はPoissonの薄板の伸縮運動理論に一致し、高次理論が、これらの古典理論解を補正する理論として導かれた。

なお、以上の流れに従う理論式の誘導には、2通りの方法が可能である。その第1は、各段階で求まる面外応力を、そのままの形で用いて、次の段階の物理量を求めていき、所定の次数の理論式まで求めた時点で、初めて(S. B. C)を用いて支配式を定式化するものであり、第2は、各段階ごとに、(S. B. C)を満足させることによって、その段階で生起した変位係数が満たすべき関係式を求め、これらを逐次代入しながら所定の次数の支配式まで導くものである。ここでは、前者を総括求積型理論(Gn-理論)、後者を段階求積型理論(Sn-理論)と呼び両者の差異についても検討を加える。

これらの、低次($n=1, 2$)の支配運動方程式を、上に述べた、波動の分散解析のための1方向板の動的支配式の場合に限定して示せば次式のようなものである。

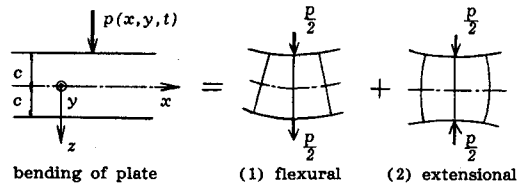


Fig. 1 Decomposition of bending of plate.

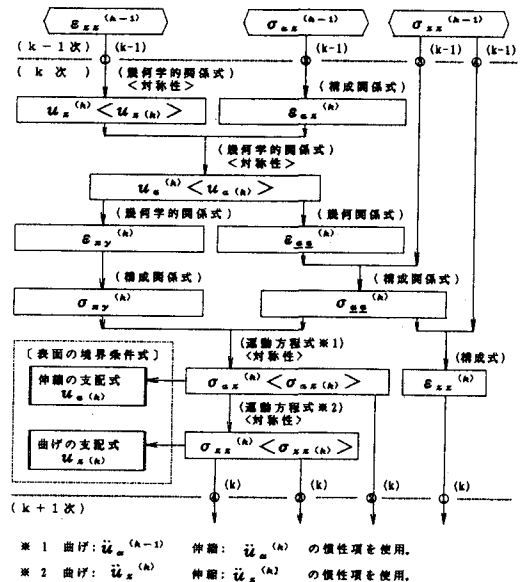


Fig. 2 Flow chart for deduction of the theory.

総括求積型 (Gn-理論)

曲げ挙動⁴⁾

$$\sum_{n=1}^{\infty} D_n u_{n0} = 0$$

$$D_1 = \left(\frac{c^4}{3}\right) \left(\partial_x^4 + (1-\nu) \left(\frac{3}{2c^2}\right) \frac{\rho}{G} \partial_x^2 \partial_t^2 \right)$$

$$D_2 = \left(\frac{c^4}{30}\right) \left(\frac{(8-3\nu)}{(1-\nu)} \partial_x^4 - (2-\nu) \left(\frac{5}{2c^2}\right) \frac{\rho}{G} \partial_x^2 \partial_t^2 \right)$$

伸縮挙動

$$\sum_{n=1}^{\infty} D_n u_{n0} = 0$$

$$D_1 = c^2 \left(\partial_x^2 - \frac{(1-\nu)}{2} \frac{\rho}{G} \partial_t^2 \right)$$

$$D_2 = -\left(\frac{c^4}{6}\right) \left(\frac{(2+\nu)}{(1-\nu)} \partial_x^4 - \frac{(4+\nu)}{2} \frac{\rho}{G} \partial_x^2 \partial_t^2 + \frac{(1-\nu)}{2} \frac{\rho^2}{G^2} \partial_t^4 \right)$$

段階求積型 (Sn-理論)

曲げ挙動⁵⁾

$$c^4 \partial_x^4 u_{n0} = \sum_{n=1}^{\infty} D_n u_{n0}$$

$$D_{11} = (1-\nu) \left(\frac{3c^2}{2}\right) \frac{\rho}{G} \partial_t^2$$

$$D_{12} = -(17-7\nu) \left(\frac{c^4}{20}\right) \frac{\rho}{G} \partial_x^2 \partial_t^2$$

伸縮挙動

$$c^2 \partial_x^2 u_{n0} = \sum_{n=1}^{\infty} D_n u_{n0}$$

$$D_{11} = (1-\nu) \left(\frac{c^2}{2}\right) \frac{\rho}{G} \partial_t^2 \quad D_{12} = 0$$

$$D_{20} = -\nu^2 \left(\frac{c^4}{12}\right) \frac{\rho^2}{G^2} \partial_t^4$$

③ 数値計算例

これらの各次数の理論式を用い無限板中を伝播する平面調和波(波数 k 、位相速度 c_p)の分散解析を行った結果の、分散曲線と板厚モードをFig. 3からFig. 4-2に示す。これらより、高次理論の結果は逐次求積型の曲げ挙動の場合以外は芳しくなく、いずれも1次モードにおける古典理論解の僅かな補正に留まっており、かつ、高次のモードに関する解析は行えないことが判明した。

参考文献 1) 根岸・山野辺: 土木学会東北支部発表会概要, pp. 10-11, 1987. 2) 根岸・平島: 土木学会第42回年次学術講演会概要集, pp. 38-39, 1988. 3) 根岸・平島: 土木学会第44回年次学術講演会概要集, pp. 210-211, 1989. 4) Niordson F. I.: "An asymptotic theory for vibrating plates", Int. J. Solids Structures, vol. 15, pp. 167-181, 1979. 5) Zade, M. I. G.: "Asymptotic analysis of three-dimensional dynamic equations of a thin plate", PMM, Vol. 38, no. 6, pp. 1072-1078, 1974.

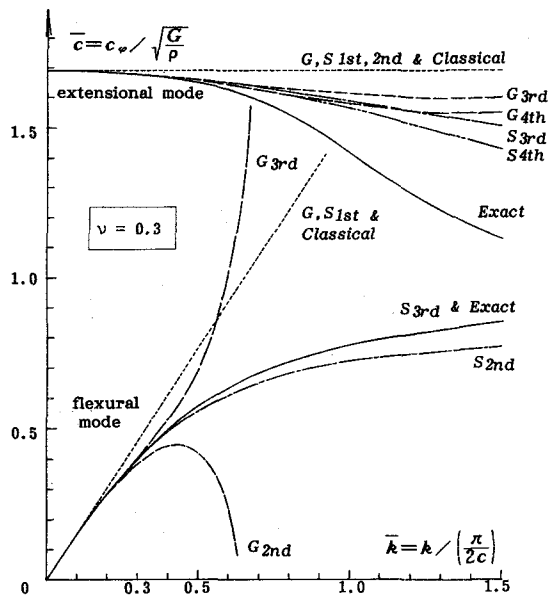


Fig. 3 Phase velocity of flexural and extensional waves in infinite plates.

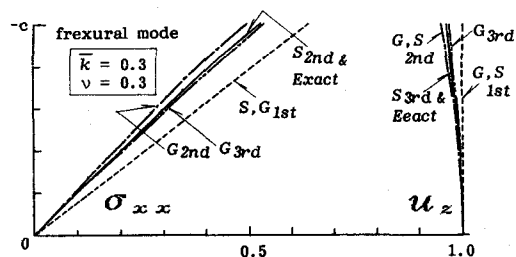


Fig. 4-1 Thickness modes of flexural wave.

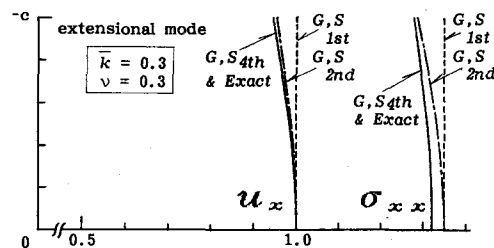


Fig. 4-2 Thickness modes of extensional wave.