I ― 7　有限要素法による２次元直交異方性問題の解析

○岩手大学　学生員　神野　悟
岩手大学　正　員　宮本　裕
岩手大学　　　　　辻野　哲司

１．はじめに

直交異方性材料における各種構造物要素の弾性問題については、いくつかの解法がえられているが、弾性変形と塑性変形が同程度で共存する弾塑性問題はよく解明されていない。材料または構造物において、その一部分あるいは全体に降伏を生じ、塑性状態になると応力－ひずみ間に線形関係が成立しなくなる。そこで本論文では直交異方性材料の２次元弾塑性問題（ここでは平面応力状態について）を解析する。

まず、第一段階として直交異方性を考慮した弾性問題について報告する。

２．解析方法

弾性問題において、応力とひずみの間には Hooke の法則が成り立ち、

$$\{\varepsilon\} = [Ce]\ \{\sigma\} \qquad (1)$$

［Ce］の逆マトリックスを［De］とすれば（１）式は、

$$\{\sigma\} = [De]\ \{\varepsilon\} \qquad (2)$$

となる。

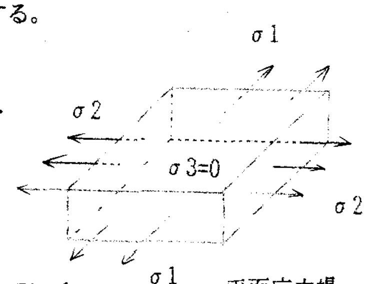

Fig 1　平面応力場

［Ce］はたわみ性マトリックス、［De］は剛性マトリックスである。

また、応力－ひずみの関係を増分形で表示すれば、

$$\{d\sigma\} = [De]\ \{d\varepsilon e\} \qquad (3)$$

となる。ここで、［De］は９つの独立な定数からなる、６行６列のマトリックスとなり次式で与えられる。

$$[De] = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{21} & d_{31} & 0 & 0 & 0 \\ d_{12} & d_{22} & d_{32} & 0 & 0 & 0 \\ d_{13} & d_{23} & d_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{66} \end{bmatrix} \qquad (4)$$

ただし、直交異方性の材料では異方性の主軸が座標軸と一致して、応力｛σ｝及び、ひずみ｛ε｝あるいは、それらの増分を表わすものとする。この様に座標軸を選べば、弾性変形では弾性ひずみ増分 $\{d\varepsilon e\}$ は垂直応力に対しては垂直ひずみ、せん断応力に対してはせん断ひずみとなる。

また、材料 の X 方向、Y 方向のヤング係数を Ex, Ey, ポアソン比を $\nu x, \nu y$, せん断弾性係数を Gxy とした。平面応力場　（$\sigma z=0, \tau yz=\tau zx=0$）の場合、マトリックスの成分 $d_{11}, d_{12}, \cdots, d_{66}$ を表示すると、

$$d_{11}=\frac{Ex}{K} \quad d_{12}=\frac{\nu yEx}{K} \quad d_{21}=\frac{\nu xEy}{K} \quad d_{22}=\frac{Ey}{K} \quad d_{66}=Gxy$$

$$d_{13}=d_{23}=d_{31}=d_{32}=d_{33}=d_{44}=d_{55}=0$$

$$K=1.0-\nu x\times\nu y$$

ここで要素内の変位を仮定し、三角形要素内の X,Y 方向変位 U,V は１次関数と考えると、

$$\begin{aligned} U&=\alpha_1+\alpha_2 x+\alpha_3 y \\ V&=\alpha_4+\alpha_5 x+\alpha_6 y \end{aligned} \qquad (5)$$

表わされる。ただし、$\alpha_1 \sim \alpha_6$ は未定係数である。

(5) 式に節点 i,j,k の座標値を代入すると、i,j,k 点での x,y 方向の節点変位 Ui,Vi,Uj,Vj,Uk,Vk は、(6) 式で表わされ、またマトリックスで表わせば、(7) 式の様になる。

$$\begin{aligned} Ui&=\alpha_1+\alpha_2 xi+\alpha_3 yi \\ Vi&=\alpha_4+\alpha_5 xi+\alpha_6 yi \\ Uj&=\alpha_1+\alpha_2 xj+\alpha_3 yj \\ Vj&=\alpha_4+\alpha_5 xj+\alpha_6 yj \\ Uk&=\alpha_1+\alpha_2 xk+\alpha_3 yk \\ Vk&=\alpha_4+\alpha_5 xk+\alpha_6 yk \end{aligned} \qquad (6)$$

$$\begin{Bmatrix} Ui \\ Vi \\ Uj \\ Vj \\ Uk \\ Vk \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & xi & yi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & xi & yi \\ 1 & xj & yj & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & xj & yj \\ 1 & xk & yk & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & xk & yk \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{Bmatrix} \qquad (7)$$

または、

$$\{\delta g\} = [C]\ \{\alpha\} \qquad (7\text{-}a)$$

$\{\alpha\} = [C^{-1}]\ \{\delta g\}$ (7-b)

となる。また、ひずみ $\{\varepsilon\}$ について考えれば、弾性理論より、

$$\varepsilon x=\frac{U}{X},\ \varepsilon y=\frac{V}{Y},\ \tau xy=\frac{U}{Y}+\frac{V}{X} \quad (8)$$

(8) を (5) に代入すると、

$$\varepsilon x=\alpha_2,\ \varepsilon y=\alpha_6,\ \tau xy=\alpha_3+\alpha_5$$

となり、マトリックス表示すると、

$$\{\varepsilon\} = [B]\ \{\alpha\} \quad (9)$$

未定係数 $\{\alpha\}$ は (7) 式によって表わされている。

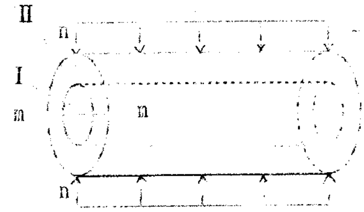

Fig 2

以上により、三角形要素 g の剛性マトリックス [Kg] が次式で求められる。

$$[Kg] = \int\int\int [C^{-1}]^T [B]^T [D]\ [B]\ [C^{-1}]\, dxdydz \quad (10)$$

また、 $[C^{-1}]$, $[B]$, $[D]$ は一定であることから、

$$[Kg] = Ah\ [C^{-1}]^T [B]^T [D]\ [B]\ [C^{-1}] \quad (11)$$

となる。（A：三角形の面積；h＝要素の板厚）

こうして求められた各要素の剛性マトリックスを重ね合わせ、全体剛性マトリックスを作成し、拘束条件を考慮しながら節点変位を求め、(1) 式に (9), (7-b) を代入すれば、要素の応力が求められる。

３．計算例

計算例として２層同心円柱コンクリート（直径：R＝15.0 cm；r＝7.5 cm：L＝30.0 cm）を Fig 2のように荷重（実験で得られた破壊荷重；P）を載荷した場合を考えてみた。

また、今回は境界要素法（ＢＥＭ）で求めた変位と比較してみた。有限要素法（ＦＥＭ）は三角形要素，１１８節点１９５要素，境界要素法では線形要素法５９節点５６要素で求めた(Fig 4,5,6)。

Fig 3

	I	II
Ex,Ey (kg/cm²)	257660	220450
νx,νy	0.2186	0.2028
Gxy (kg/cm²)	105720	91640
P (kg)	3910	

分割方法

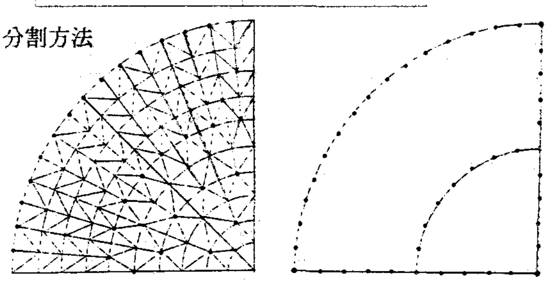

Fig 4

鉛直方向（n－n点位置）

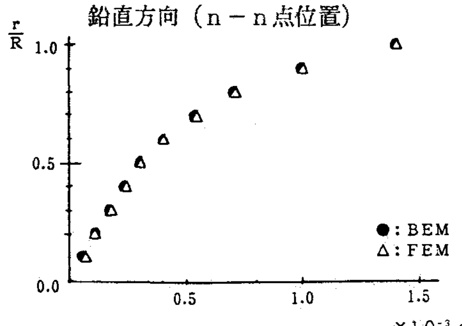

Fig 5 Displacement

水平方向（m－m点位置）

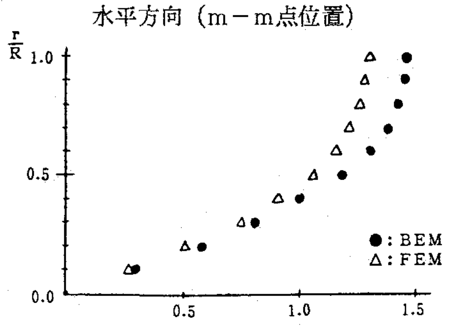

Fig 6 Displacement

４．あとがき

今回は、弾性問題について考えてみたが、例えばコンクリートの様に圧縮応力強度の９０％から塑性状態へ移るなど、材料または構造物が塑性状態であれば全変形段階を何段階かに分け、応力ーひずみの増分概念を導入し断片的線形問題として考えれば、弾塑性問題の解析へつながる。

ー参考文献ー

三本木茂夫．吉村信敏：コンピューターによる構造工学講座，Ｉ－１－Ｂ，培風館

山田嘉昭：コンピューターによる構造工学講座；Ⅱ－２－Ａ，培風館

辻野哲司：木材学会誌，２１(5),P265(1975)

辻野哲司：木材学会誌，２２(9),P481(1976)