Ｉ－３　Timoshenko Beam Theory の適用範囲について －その２－

八戸工業大学　正会員　穐山　和男

１．はじめに

単純梁について同一のモードカーブが現われることを具体的に説明する。

２．解析および計算結果

固有関数は次のようになる。[1]

Ｉ）$X < b/(a)^{1/4}$の場合（低次側）

$$\left.\begin{aligned} u &= C_1\sin\alpha\xi + C_2\cos\alpha\xi + C_3\mathrm{sh}\beta\xi + C_4\mathrm{ch}\beta\xi \\ \theta &= \frac{A}{\alpha}\left(C_1\cos\alpha\xi - C_2\sin\alpha\xi + C_3\frac{1}{\mu\delta}\mathrm{ch}\beta\xi + C_4\frac{1}{\mu\delta}\mathrm{sh}\beta\xi\right) \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

II）$X > b/(a)^{1/4}$の場合（高次側）

$$\left.\begin{aligned} u &= C_1\sin\alpha\xi + C_2\cos\alpha\xi + C_3\sin\beta'\xi + C_4\cos\beta'\xi \\ \theta &= \frac{A}{\alpha}\left(C_1\cos\alpha\xi - C_2\sin\alpha\xi + C_3\frac{1}{\mu'\delta'}\cos\beta'\xi - C_4\frac{1}{\mu'\delta'}\sin\beta'\xi\right) \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

したがって、単純梁における振動数方程式と固有関数は次のようになる。

１）$X < b/(a)^{1/4}$の場合（低次側）

$$\sin\alpha = 0 \quad (3)$$

$$\left.\begin{aligned} u &= C\sin\alpha\xi \\ \theta &= D\cos\alpha\xi \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

２）$X > b/(a)^{1/4}$の場合（高次側）

$$\sin\alpha\sin\beta' = 0 \quad (5)$$

ｉ）$\sin\beta' \neq 0$のとき

$$\sin\alpha = 0 \quad (6)$$

$$\left.\begin{aligned} u &= C\sin\alpha\xi \\ \theta &= D\cos\alpha\xi \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

ii）$\sin\alpha \neq 0$のとき

$$\sin\beta' = 0 \quad (8)$$

$$\left.\begin{aligned} u &= C\sin\beta'\xi \\ \theta &= D'\cos\beta'\xi \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

表１

b = 10

次数	固有値 X
1	2.89603271
2	5.03423586
3	6.64236601
4	7.94264948
5	8.16139359
6	9.05025026
7	9.38997038
8	10.02722924
9	10.67495954
10	10.90982478

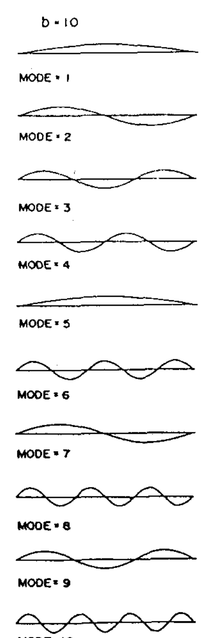

図１　モードカーブ

ここで、

$$\alpha=\frac{1}{2^{1/2}}\frac{X^2}{b^2}\left[(a+1)+\{(a-1)^2+4\left(\frac{b}{X}\right)^4\}^{1/2}\right]^{1/2} \tag{10}$$

$$\beta=\frac{1}{2^{1/2}}\frac{X^2}{b^2}\left[-(a+1)+\{(a-1)^2+4\left(\frac{b}{X}\right)^4\}^{1/2}\right]^{1/2} \tag{11}$$

$$\beta'=\frac{1}{2^{1/2}}\frac{X^2}{b^2}\left[(a+1)-\{(a-1)^2+4\left(\frac{b}{X}\right)^4\}^{1/2}\right]^{1/2} \tag{12}$$

$$A=\alpha^2-\frac{aX^4}{b^2},\quad B=\beta^2+\frac{aX^4}{b^2},\quad \mu=\frac{\beta}{\alpha},\quad \delta=\frac{A}{B},\quad B'=\beta'^2-\frac{aX^4}{b^2}$$

$$\mu'=\frac{\beta'}{\alpha},\quad \delta'=\frac{A}{B'},\quad X^4=\frac{p^2\ell^2}{c_e{}^2b^2},\quad c_e=\left(\frac{E}{\rho}\right)^{1/2},\quad b=\frac{\ell}{R}$$

$$R=\left(\frac{I}{S}\right)^{1/2},\quad a=\frac{E}{k'G}$$

p：円振動数，ℓ：部材長，E：ヤング率，G：剛性率，I：断面２次モーメント，S：断面積，

ρ：材料の密度，k'：せん断係数，$u=Y/\ell$，Y：全たわみ，θ：曲げだけによるたわみ角

C_1～C_4：定数，$D=(A/\alpha)C$，$D'=(B'/\beta')C$，C：定数

表１と図１は$E=2(1+\nu)G$，$\nu=0.3$，$k'=0.833$，$b=10$のときのXとuのモードカーブである。$b/(a)^{1/4}=7.5235$となるので、式（3）からは3次までしか求まらない。５次、７次、９次における１～３次と同一のカーブモードは、式（8），（9）から出てくる。

３．おわりに

１～３次が進行波の第１モードの振動数、５，７，９次がそれに対応する進行波の第２モードの振動数と一致する。[1]したがって、式（1）は、進行波の第１モードの振動数を与え、式（2）は進行波の第２モードの振動数を与える。

横振動においては、一般に進行波の第１モードの振動数を考える。

故に、固有関数は式（1）と考えるのが妥当である。

参考文献

１）穐山 和男，第４４回年講Ｉ，(1989)674-5