

I - 2

トラスの形状最適化と変分原理について

八戸工業大学 正会員 長谷川 明

1. はじめに

連続構造の形状最適化問題では、変分原理に基づく方法を応用した研究がなされている。^{1) - 3)} この考え方は、体積一定の付帯条件をつけたポテンシャルエネルギー汎関数から、ポテンシャルエネルギーを最小とする形状を求めることにある。一般に使われる変分原理は、形状が決定している物体の挙動に関する変数の変分を考察しているのに対し、ここで述べる変分原理は、形状に関する不変量、例えば体積、を規定して物体の挙動を表現する変数の他に、形状を表現する変数をも考慮しているため、逆変分原理（Inverse Variational Principle）と呼ばれることがある。^{1), 2)}

本文は、このような連続体の形状最適化に用いられている変分原理をトラスの形状最適化に適用し、体積一定のもとでポテンシャルエネルギーを最小とする形状と、逆にポテンシャルエネルギー一定のもとでトラスの体積を最小とする形状の変分関係を示し、両者の比較および考察を行ったものである。

2. トラスの形状最適化のための変分原理

トラスの場合、1) 体積一定のもとでポテンシャルエネルギーを最小とする形状、逆に2) ポテンシャルエネルギー一定のもとでトラスの体積を最小とする形状を求めるための汎関数は(1)式および(7)式で表現される。ここで、図1のようなトラスを考え、部材の伸びである Δl_i は節点変位 u_i, v_i と部材角 θ_i で次のように表現されており、

$$\Delta l_i = -(u \cos \theta_i + v \sin \theta_i)$$

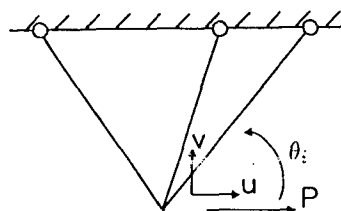


図1 トラスの一例

設計変数を部材断面積 A_i と部材角 θ_i と考えると、1) および2) のそれぞれの変分関係は(2)～(6)式、(8)～(12)式となる。

これらの関係式は、それぞれ次の関係を示している。

a) (2), (3)式および(8), (9)式はそれぞれ節点での水平、鉛直方向の力のつりあい式である。

b) (6)式は体積一定の(12)式はポテンシャルエネルギー一定の付帯条件式である。

c) (4), (5)式および(11), (12)式は、設計変数の最適解を求める方程式である。

この結果、1), 2) の最適化問題はそれぞれ(2)～(6)式、(8)～(12)式の連立方程式を解く問題となる。

$$\Pi = \sum \frac{E_i A_i}{2l_i} (\Delta l_i)^2 - pu + \lambda (\sum A_i l_i - V_0) \quad (1) \quad \Pi^* = \sum A_i l_i + \lambda^* \left\{ \sum \frac{E_i A_i}{2l_i} (\Delta l_i)^2 - pu - U_0 \right\} \quad (7)$$

$$-\sum \frac{E_i A_i}{l_i} \Delta l_i \cos \theta_i - p = 0 \quad (2) \quad -\sum \frac{E_i A_i}{l_i} \Delta l_i \cos \theta_i - p = 0 \quad (8)$$

$$-\sum \frac{E_i A_i}{l_i} \Delta l_i \sin \theta_i = 0 \quad (3) \quad -\sum \frac{E_i A_i}{l_i} \Delta l_i \sin \theta_i = 0 \quad (9)$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left[\sum \left\{ \frac{E_i A_i}{2l_i} (\Delta l_i)^2 + \lambda A_i l_i \right\} \right] = 0 \quad (4) \quad \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\sum \left\{ A_i l_i + \lambda^* \frac{E_i A_i}{2l_i} (\Delta l_i)^2 \right\} - \lambda^* (pu + U_0) \right] = 0 \quad (10)$$

$$\frac{E_i}{2l_i} (\Delta l_i)^2 + \lambda l_i = 0 \quad (5) \quad \lambda^* \frac{E_i}{2l_i} (\Delta l_i)^2 + l_i = 0 \quad (11)$$

$$\sum A_i l_i - V_0 = 0 \quad (6) \quad \sum \frac{E_i A_i}{2l_i} (\Delta l_i)^2 - pu - U_0 = 0 \quad (12)$$

ここで、

A_i : i 部材の断面積 E_i : i 部材の弾性係数 p : 外力 u : 変位
 l_i : i 部材の部材長 Δl_i : i 部材の部材の伸び λ : ラグランジュ乗数 V_0 : 体積一定値

3. トラスの形状最適化のための変分原理に関する2, 3の考察

a) 体積一定のもとでポテンシャルエネルギーを最小とする形状とポテンシャルエネルギー一定のもとで体積を最小とする問題の最適解を比較した。両者の連立方程式で異なっているのは付帯条件式と設計変数の最適解を求める方程式である。

まず、(10)式は(12)式から

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \{ \Sigma (A_i l_i) \} = 0 \quad (13)$$

となり、これに(11)の l_i を代入すると、 λ^* に関わらず

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \{ \Sigma \frac{E_i A_i}{2 l_i} (\Delta l_i)^2 \} = 0 \quad (14)$$

となる。この式は、(6)式の関係を取り入れた(4)式に一致する。このため、(5)式と(11)式が一致するよう、 $\lambda^* = 1/\lambda$ とすれば、両者の最適解は一致することとなる。

b) (4)式の第2項が(6)式の体積一定条件から0となるため、本問題はひずみエネルギー最小の形状を求めていることとなる。

c) (5)式から、
$$-\lambda = \frac{1}{2} E_i \left(\frac{\Delta l_i}{l_i} \right)^2 \quad (15)$$

となる。右辺は単位体積当りのひずみエネルギーであるから、全部材の単位体積当りのひずみエネルギーが等しいことが最適化の条件となっていることがわかる。また、各部材の弾性係数 E_i が等しいときには、各部材のひずみの絶対値、応力の絶対値は一致する。

d) 両者の設計が一致するとき、すなわち最適解の設計であるとき、ポテンシャルエネルギーの一定値は、次式となる。

$$U_0 = -\lambda \Sigma (E_i A_i l_i) - p u \quad (16)$$

弾性係数 E_i が一定であれば

$$U_0 = -\lambda E V_0 - p u \quad (17)$$

となる。

4. おわりに

構造物の最適化計算は、本文で示したように、本来は、構造の釣合条件、制約条件のもとで最適な目的関数を見いだす問題である。

前者は等式制約条件であり後者は一般に不等式制約条件となっている。通常この最適化問題を前者の等式条件は構造解析、後者の不等式条件は最適化と呼んで分離して解いている。これは、構造解析と数値計画的な最適化手法がそれぞれ独自に発展していることを反映しており、大きな意味で2段階最適化と考えることができる。

参考文献

1) Horak: Inverse variational Principle of Continuum Mechanics, 1969, Rozprawy Czechoslovenske Akademie Ved

2) 瀬口靖幸, 多田幸生: 逆変分原理による構造物の形状決定問題(有限要素法による取扱い), 日本機械学会論文集(第1部)第44巻, 381号, 1987

3) 田村武, 小林昭一: 連続体の形状最適化に関する基礎的研究, システム最適化に関するシンポジウム講演論文集, 1989