Ⅳ－７　　直線あてはめに関する覚書

八戸工業大学　正会員　岩渕清行

１．まえがき

この覚書は測量の本[1),2),3),4)]によく出てくる、両軸に観測誤差を仮定する時の直線あてはめに関し最近わかった事について書くものである。さて　下の表2は、表1を標準化したものである。表1は森北から出ている土木計画数学のﾃｷｽﾄ[5)]から写したものてあるからご存知の方もおられるであらうが、普通によくある測点のﾃﾞｰﾀである。

表1

no	x	y
1	0.78	102
2	0.84	90
3	0.19	43
4	0.40	64
5	0.74	80
6	0.40	78
7	0.50	44
8	0.62	95
9	0.55	72
10	0.54	55

表2

no	x	y
1	1.1891	1.5176
2	1.5077	0.9044
3	-1.9430	-1.4971
4	-0.8281	-0.4241
5	0.9768	0.3934
6	-0.8281	0.2913
7	-0.2973	-1.4461
8	0.3398	1.1599
9	-0.0319	-0.0153
10	-0.0849	-0.8840

表2の数値は倍精度計算したものを小数5位で丸めた もの。

表2のﾃﾞｰﾀのように、標準化された(すなわち無次元化された)測点ﾃﾞｰﾀから　直交回帰直線を求めて見ると常にx軸にたいして４５度の傾斜をなす直線がえられる。このため(45度であるため)、結果において測点の残差ﾍﾞｸﾄﾙのx成分とy成分の比が１になる。この事は、全測点が等精度観測のとき直交回帰直線が解直線であるという事と整合する。直交回帰直線にかんしｹﾝﾄﾞｰﾙ[6)]は両軸誤差分散の比が 1 の時の解直線は第一主　成分の方向に等しい,そしてその直線を直交回帰(diagonal regression)と呼んだ人 はFrischだと書いてある。(時代国籍共に不明)

ところで大変不思議な事だがこの時ＲＭＡ[7)]と中点線二乗和最小直線[8)]が経験上10桁の精度で確実にこの直交回帰直線と一致してしまう。昭和63年度の広島での土木学会で森　忠次氏は　ＲＭＡは一次成分かも知れないといわれた。証明はまだである。

２．記号

予備知識の整理をかね記号の説明をする。あてはめ直線をもとめるべく与えられる測点を$p_i(x_i,y_i)$;$i=1,2,...,n$; $n>=3$とする。$x_g\equiv(\Sigma x_i)/n$, $y_g\equiv(\Sigma y_i)/n$, $sx^2\equiv\Sigma(x_i-x_g)^2$, $sy^2\equiv\Sigma(y_i-y_g)^2$, $sxy\equiv\Sigma(x_i-x_g)(y_i-y_g)$,$A_1=sxy/sx^2$, $A_2=sy^2/sxy$,とおく時　y on x　regression lineは　$y=A_1x+B_1$, x on y regression lineは $y=A_2x+B_2$となる。
直交回帰直線は$y=A_3x+B_3$,　RMAは$y=A_4x+B_4$,中点線二乗和最小直線は$y=A_5x+B_5$とかく。　A_3は　aに関するつぎの方程式においてﾊﾟﾗﾒｰﾀcを１にしたときの一根で　A_4は一次の係数が丁度0になる如くcを選らんだ時の一根である。cは非負とする。その時(1)は常に符号反対の二実根をもつがA_3,A_4共にsxyの符号と同じ符号の根を採用するものとする。

$$a^2 - (A_2 - c/A_1)a - c = 0 \qquad ....(1)$$

A_3は桁落ちに注意して根の公式で求める。適根と不適の根とは直交する。 A_4は明らかに$A_4=SGN(sxy)\times\sqrt{(A_1\times A_2)}$で計算される。この時の不適の根は適根と絶対値ひとしく符号反対である。計算式から分かるようにA_4の勾配は単に(x on y),(y on x)　両　regression lineの勾配の幾何平均にすぎない。実際のA_4の計算は$\sqrt{(sy^2/sx^2)}$にA_1の符号をつければよい。　A_5はaに関するつぎの四次方程式の一根である。複数の実根のうち目的関数(後述)を最小にする根を採用する。実際の数値計算の時は答,すなわち,その勾配はA_1とA_2の間にある事が分かっているので「はさみうち法」で簡単にA_5は計算される。方程式(2)は一般に二実根を持ち不適の根はつぎに述べる目的関数を最大にする。
すなわち中点線二乗和最小直線の目的関数は示誤三角形において測点と斜辺の中点とを結ぶ線分の二乗和で、ここに示誤三角形とは各測点p_iにおいてx軸,y軸に平行な直線を引きそれぞれが解直線と交わる点をu_i, v_iとする時に出来る三角形　$p_iu_iv_i$の事でu_iv_iが斜辺である。

$$a^4/A_1 - a^3 + a - A_2 = 0 \quad ....(2)$$

そしてBは総て　$B_j = y_g - x_g A_j$ ....(j=1,2,3,4,5) ....(3)

で求められる。すなわちj=1,2,3,4,5 の $y=A_j x+B_j$ 直線はすべて測点の重心(x_g,y_g)を通る。なお念のために申しそえるがno.4の直線すなわちRMAは示誤三角形の面積和最小直線である。そしてまたno.5の直線すなわち中点線二乗和最小直線は示誤三角形の斜辺二乗和最小直線でもある。もし人がRMAの定義として「ななめ線二乗和最小直線」としたいならばそれは「解直線へ解直線の勾配と絶対値ひとしく符号反対の直線をひいた時そのななめ線の二乗和最小直線」と定義できる。この場合このななめ線は結果において示誤三角形の中点線になっている。したがってno.4の直線とno.5の直線は同じ直線と思うかもしれないが実際にはちがう。私があえて表1を例にするのはこのﾃﾞｰﾀの時「ちがいかわかる」からである。

3．数値計算

表1のﾃﾞｰﾀ	表2(標準化したﾃﾞｰﾀ	および備考)
x_g= 0.556	0	
y_g= 72.3	0	
sx^2= 0.35484	10	この値は n である
sy^2=3830.1	10	この値は n である
sxy= 27.542	7.4709207945	この値は r の n倍
r= 0.7470920794	0.7470920794	r ≡（相関係数）　標準化しても不変
A_1= 77.6180813887	0.7470920794	A_1は相関係数と同じ
A_2= 139.0639750199	1.3385230917	$A_2=1/A_1$　になっている
A_3= 139.0582826533	1	
A_4= 103.8935942748	1	
A_5= 77.6282749024	1	
B_1= 29.1443467478	0	
B_2= -5.0195701111	0	
B_3= -5.0164051552	0	
B_4= 14.5351615831	0	
B_5= 29.1386791542	0	

この結果は図をかいたらよくわかるであらう。

4．おわりに

数値計算の結果からわかるように標準化したﾃﾞｰﾀの時、直交回帰直線，中点線二乗和最小直線，ＲＭＡの三直線は完全に一致する。証明はまだであり、意味もよくはわからない。図をかいてみると標準化しないﾃﾞｰﾀの時表1の如くA_3が100以上と1にくらべ大きい場合にはno.5の直線はno.1の直線と鉛筆の芯の太さで一致しno.3の直線はno.2の直線と一致する。この事はもしno.3の直線自身の勾配が1よりかなり小さくなった時は逆転する。なお標準化は初歩の統計学で習う通りである。表示とは無関係に実際計算はすべて倍精度でなければならない。

参考文献

1 ） 森　忠次著，測量学2応用編，丸善，昭和56年，pp.359-371
2 ） 田島稔/小牧和男共著，最小二乗法の理論とその応用，東洋書店，昭和63年，第二版，pp.7-9，および第八章
3 ）米谷栄二/山田善一共著，新版測量学一般編，丸善，昭和58年，pp.341-365
4 ） Edward M.Mikhail and Gordon Gracie,Analysis and Adjustment of Survey Measurements ,1981,第九章
5 ） ちしや木武/渡辺義則共著，土木計画数学，森北，1983年　p.124
6 ） M.G.ｹﾝﾄﾞｰﾙ原著，浦昭二/竹並輝之共訳，多変量解析の基礎，ｻｲｴﾝｽ社，昭和60年，初版第8刷，pp.50-53
7 ）Jones,H.E.,1937.Some geometrical considerations in the general theory of fitting lines and planes, Metron,13:21-32
8 ）この直線に関する文献はない。本文をみてください。