

II - 4 1 下流側水深を有するダム破壊流れフロントの破壊直後での挙動 —志村の解の拡張—

秋田大学 学生員 ○大 口 寿 文
秋田大学 正 員 松 富 英 夫

1. まえがき

下流側水深がない場合のダム破壊流れフロントの破壊直後での挙動に関する研究例として、志村のものがある¹⁾。しかし、適用段階が同じで、下流側水深を有する場合の研究例はまだないと思われる。著者等の一人は、下流側水深を有する場合のダム破壊流れの研究を行ってきている²⁾。本研究はその一環で、研究の欠落している流れ段階を埋めるべく、志村の解の拡張を試みたものである。

2. 支配方程式

初期のダム上・下流側は静水とする。粘性は考えない。対象流れは浅水理論に支配されるとする。この時、フロントの挙動に関する支配方程式として、次式群を得る。

$$\frac{dh_f}{dt} = 0 \cdots (1) \quad \frac{dx_f}{dt} = u_f - \frac{h_0}{\alpha_f} \frac{\partial u_f}{\partial x} \cdots (2)$$

$$\frac{du_f}{dt} = g \alpha_f - \frac{h_0}{\alpha_f} \left(\frac{\partial u_f}{\partial x} \right)^2 \cdots (3)$$

$$\frac{d\alpha_f}{dt} = -2\alpha_f \frac{\partial u_f}{\partial x} - \frac{h_0}{\alpha_f} \frac{\partial u_f}{\partial x} \frac{\partial \alpha_f}{\partial x} + h_0 \frac{\partial^2 u_f}{\partial x^2} \cdots (4)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial u_f}{\partial x} \right) = - \left(\frac{\partial u_f}{\partial x} \right)^2 + g \frac{\partial \alpha_f}{\partial x} - \frac{h_0}{\alpha_f} \frac{\partial u_f}{\partial x} \frac{\partial^2 u_f}{\partial x^2} \cdots (5)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \alpha_f}{\partial x} \right) = -3 \frac{\partial u_f}{\partial x} \frac{\partial \alpha_f}{\partial x} - 3\alpha_f \frac{\partial^2 u_f}{\partial x^2} - \frac{h_0}{\alpha_f} \frac{\partial u_f}{\partial x} \frac{\partial^2 \alpha_f}{\partial x^2} + h_0 \frac{\partial^3 u_f}{\partial x^3} \cdots (6)$$

ここで、 h ：水深、 u ：水粒子速度、 α ($= -\partial h / \partial x$)：水面勾配、 h_0 ：初期のダム下流側水深、 g ：重力加速度、 x ：水平距離座標、 t ：時間。また、下添字 f はフロントでの値であることを示す。諸記号の定義を図-1に示す。上式群において、 $h_0 = 0$ とすれば、志村の式に一致する。ただし、式(6)は本研究固有のもので、式(4)に $(\partial \alpha_f / \partial x)$ 項が含まれているため、必要なものである（完結問題）。

本研究では、志村に習い、物理過程の主要な特徴に注目して、大胆に解くことにする。できるだけ解析的に解くこととし、どうしても解けそうにない段階で、数値的に解くことにする。

3. 解の例とその検討

フロントを特徴づける代表的物理量を導入し、式(5)の右辺3項の大きさの関係を検討する。その結果、

$$\frac{h_0}{\alpha_f} \frac{\partial u_f}{\partial x} \frac{\partial^2 u_f}{\partial x^2} < \left(\frac{\partial u_f}{\partial x} \right)^2 \ll g \frac{\partial \alpha_f}{\partial x} \quad (\text{十分に小さな } t) \cdots (7)$$

$$g \frac{\partial \alpha_f}{\partial x} \ll \left(\frac{\partial u_f}{\partial x} \right)^2 < \frac{h_0}{\alpha_f} \frac{\partial u_f}{\partial x} \frac{\partial^2 u_f}{\partial x^2} \quad (\text{十分に大きな } t) \cdots (8)$$

が判断された。よって、式(5)の近似解として、各々次式が得られる。

$$\left(\frac{\partial u_f}{\partial x} \right) = g \Delta \alpha_1 t \quad (\text{十分に小さな } t) \cdots (9) \quad \left(\frac{\partial u_f}{\partial x} \right) = \frac{1}{t} \quad (\text{十分に大きな } t) \cdots (10)$$

ここで、 $\Delta \alpha_1$ は $t = t_1 \neq 0$ での $(\partial \alpha_f / \partial x)$ である。式(9)では、 $t = t_1 \neq 0$ で $(\partial u_f / \partial x) \neq 0$ の境界条件、式(10)では、Ritterの解やStoker理論等から類推される、 $(\partial^2 u_f / \partial x^2) \neq 0$ の条件が用いられている。以下でも、2階以上の偏微分項は全て零と近似される。 t の中間領域に対して、関数形を特

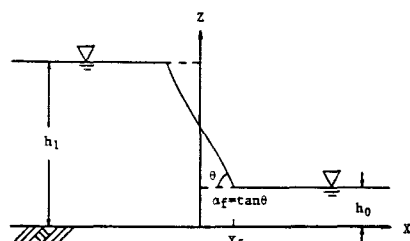


図-1 記号の定義

定することは、本対象流れでは難しい。式(9)、(10)の両方を満足する関数形として、次式が考えられる。

$$\left(\frac{\partial u_f}{\partial x}\right) = \frac{g \Delta \alpha_1 t}{g \Delta \alpha_1 t^2 + 1} \quad \dots\dots\dots(11)$$

これは志村のものと全く同形である。

式(11)、(6)を用いて、式(4)を解く。その結果、式(6)と(4)の各々から次式を得る。

$$\frac{\partial \alpha_f}{\partial x} = \frac{1}{g^{3/2} (\Delta \alpha_1)^{1/2}} \left(t^2 + \frac{1}{g \Delta \alpha_1}\right)^{-3/2} \quad \dots\dots\dots(12)$$

$$\alpha_f^2 = -\frac{2 h_0}{g^{3/2} (\Delta \alpha_1)^{1/2}} \left(t^2 + \frac{1}{g \Delta \alpha_1}\right)^{-3/2} + \frac{\alpha_1^2 + 2 h_0 \Delta \alpha_1}{g^2 (\Delta \alpha_1)^2 \{t^2 + 1/(g \Delta \alpha_1)\}^2} \quad \dots\dots(13)$$

ここで、 $(\partial^2 u_f / \partial x^2) \approx (\partial^2 \alpha_f / \partial x^2) \approx 0$ の条件、 $t = t_1 \approx 0$ で、 $\alpha_f = \alpha_1$ の境界条件を用いている。式(12)は、 $t = t_1 \approx 0$ で、 $(\partial \alpha_f / \partial x) = \Delta \alpha_1$ の境界条件を満足している。

式(11)と(13)を用いて、式(3)を書き直したものは、定係数を持つ1階の常微分方程式であるが、簡単に解けそうにない。勿論、式(3)が解けなければ、式(2)も解けない。よって、以下からは、書き直された式(3)と(2)を連立させ、Runge-Kutta法により数値的に解くことにする。時間刻み幅 Δt は0.01sを採用する。

$h_0 = 0.02\text{m}$ 、 $h_1 = 0.30\text{m}$ の場合のフロント軌跡に関する数値解例(実線)を図-2に示す。ここで、 h_1 は初期のダム上流側水深である。 α_1 と $\Delta \alpha_1$ の両方をパラメータとし、種々の組合せが存在する。その諸組合せを図示したものが図-3である。ただし、数値計算での最大

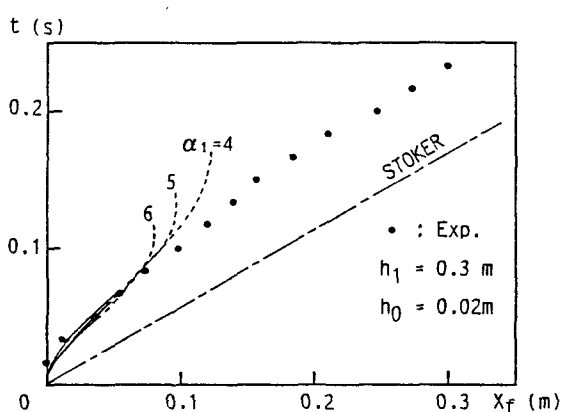


図-2 フロントの軌跡($h_0 = 0.02\text{m}$ 、 $h_1 = 0.30\text{m}$)

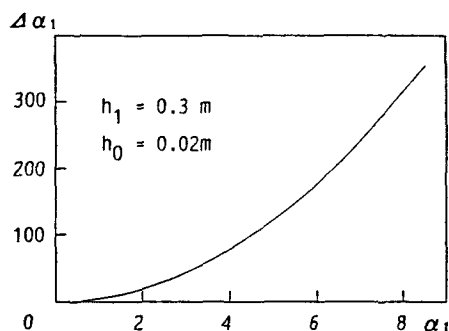


図-3 α_1 と $\Delta \alpha_1$ の関係

流速値 $u_{f\max}$ が、Stoker理論より得られる流速値に、一致するようにして決定されている。本計算例の場合、 $u_{f\max} \approx 1.42\text{m/s}$ である。本来、 α_1 と $\Delta \alpha_1$ の間には一義の関係が存在する筈である。しかし、本研究では、大胆な近似(仮定)のもとに方程式系を解いているので、それ等の関係に関する情報は得られない。フロント軌跡に関する数値解と実験値の比較等により、両者の関係を特定することができるであろう。図-2中の黒丸は実験軌跡である(3回の平均)。実験装置・方法等については、文献2)を参照されたい。実験でのフロント速度も、数値解と同様、零から次第に一定値に漸近していることが見て取れる。本計算例の場合、 $\alpha_1 \approx 5.0$ 、 $\Delta \alpha_1 \approx 122$ と推定された。 $h_1 = 0.35\text{m}$ と 0.40m の場合も検討を行った。 h_1 が大きくなるにつれて、 α_1 は増加傾向、 $\Delta \alpha_1$ はほぼ一定かやや増加傾向にあることを確認した。

4. むすび

下流側水深を有するダム破壊流れフロントの破壊直後での挙動に関する支配方程式を誘導した。解析的に解けるかもしれないが³⁾、簡単に解けそうになかったので(極力、解くことを試みた)、数値的に解き、解例を示した。実験値との比較・検討により、解の定性的傾向(支配方程式)は妥当であることも確認した。

《参考文献》 1) 志村博康：農業土木論文集、第60号、1975。 2) たとえば、松富英夫：土木論文集、No. 363、1985。 3) 島田正志：ゲートの開放に伴う不定流の基礎的研究、東京大学博士論文、p.189、1978。