

I - 18

はりの弾塑性挙動に及ぼすせん断変形の影響

 秋田高専 正員 ○ 堀江 保
 秋田大学 正員 薄木 征三

1. はじめに

曲げをうけるはりの弾塑性状態を考える場合、引張強度と圧縮強度に違いがある材料、あるいは、それらが等しくても上下非対称断面を持つ部材では、上縁または下縁の一方より塑性化が始まり、いわゆる、bi-linear型の曲げ応力となる。本研究では、引張強度と圧縮強度に差がある材料として木材を選び、塑性域の広がり等に及ぼすせん断変形の影響を理論的に検討したものである。その際、塑性部分は完全弾塑性として一定応力、弾性部分はせん断変形を考慮した弾性解の応力分布を仮定した。

2. 理論式

対象としたのは、矩形断面を有する図-1に示す単純ばりである。木材は、引張強度に比べ圧縮強度が小さいため、図-2(b)に示すように圧縮縁が圧縮強度 σ_c 達したとき降伏が始まり、同図(d)のように引張縁が引張強度 σ_t に達したとき破壊するものと推定される。

ここでは、図-2(c)の弾塑性状態の弾性部分の応力として、せん断変形を考慮した弾性解を用いたが、その理論式は、次式となる。

$$\sigma = \sigma_b \left\{ 1 + \frac{u_s''}{u_b''} \left(1 + \frac{J_y}{x D_{yy}} B_x \right) \right\} \quad (1)$$

ここで、 J_y 、 D_{yy} 、 B_x は x に関する断面量および座標で次式のように定義される。

$$J_y = \int_F x_2^2 dF, \quad D_{yy} = \int_F \left(\frac{S_x}{t} \right)^2 dF, \quad B_x = \int_0^x \frac{S_x}{t} dx, \quad S_x = \int_{x_1}^x x \cdot t \cdot dx \quad (2) \quad a-d$$

また、 σ_b は、はり理論による曲げ応力度を表し、これは直線分布となるが、式(2)の B_x より式(1)の応力分布は x に関する3次式となる。 u_s''/u_b'' は、せん断および曲げによる曲率の比を表し、図-1の各荷重状態に対したわみ解より求められるが、ここで対象とした矩形断面に対して結果のみ示すと次のようになる（引用文献参照）。

$$\text{分布荷重} \quad -\frac{u_s''}{u_b''} = \frac{4E}{5G} \left(\frac{2h}{l} \right)^2 \quad \text{集中荷重} \quad -\frac{u_s''}{u_b''} = 84 \sqrt{\frac{E}{210G}} \left(\frac{2h}{l} \right) \quad (3) \quad a, b$$

実際の u_s''/u_b'' の解には双曲線関数が含まれるが、寸法比 $(2h/l) < 0.5$ ではそれらの項は1と置けるので実用上式(3)のように表した。

この弾性解を弾性部分に適用するために、図-3に示すように弾性部分の図心より $\bar{x}$ 座標を取り、弾性部分の高さを $2h_0$ とすると式(2)の座標および断面量は次式らとなる。

$$S_x = \frac{t}{2} (\bar{x}^2 - h_0^2), \quad B_x = \frac{1}{6} (\bar{x}^3 - h_0^2 \bar{x}), \quad J_y = \frac{2}{3} t h_0^3, \quad D_{yy} = \frac{4}{15} t h_0^5 \quad (4) \quad a-d$$

S_x 、 B_x は各々図-3(b)、(c)に示すようになり、 S_x 座標はせん断応力分布に相当するので x_1 を弾塑性境界にとると上式のようなになる。

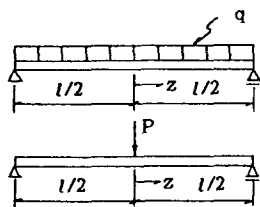


図-1 対象とした桁および荷重

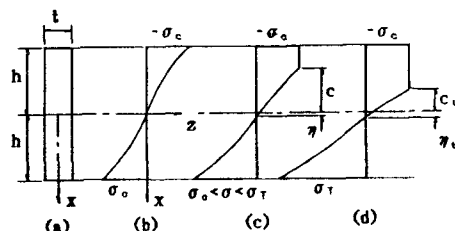


図-2 軸応力分布の変化

式(3)および式(4)を式(1)に代入し整理すると、
応力分布式は次式となる。

$$\sigma = \frac{\sigma_c}{h_0 - \zeta} (\bar{x} + \zeta) \left\{ 1 + A \left(1 - \frac{\bar{x}^2}{h_0^2} \right) \right\} \quad (5)$$

ここで、 ζ は弾性部分の図心と中立軸の距離を表す。式(1)のはり理論の応力 σ_s は、図-3(a)に示す応力分布より、 $\bar{x} = -\zeta$ において $\sigma = 0$ 、および $\bar{x} = -h_0$ において $\sigma = -\sigma_c$ の条件を用いると式(5)のようになる。式(5)の中のAは、式(3)の u_s''/u_s'' に関連し寸法比 $2h/l$ および弾性係数比 E/G の関数で各々次式となる。

$$\text{分布荷重} \quad A = -\frac{E}{3G} \left(\frac{2h}{l} \right)^2 \quad \text{集中荷重} \quad A = -\sqrt{\frac{35E}{6G}} \left(\frac{2h}{l} \right) \quad (6) \text{ a, b}$$

このAがせん断変形の影響を表し、 $A=0$ の時がはり理論である。

式(5)の応力分布より軸力 $N = \int \sigma dF$ を求め、 $N=0$ と置くと ζ と c の関係および中立軸位置 η と c の関係が次式のように求められる。

$$\zeta = \frac{3(h^2 - c^2)}{4\{3h + A(h+c)\}} \quad , \quad \eta = \frac{3(h-c)^2 + 2A(h^2 - c^2)}{4\{3h + A(h+c)\}} \quad (7) \text{ a, b}$$

ここでも前述のように、 $A=0$ とおくとはり理論の値となる。式(7)を求める際、次式の関係を用いた(図-3参照)。

$$h_0 = \frac{1}{2}(h+c) \quad , \quad \eta = \frac{1}{2}(h-c) - \zeta \quad (8) \text{ a, b}$$

3. 計算例

式(5)の応力分布を $M = \int \sigma y dF$ に代入し、はりの任意断面の曲げモーメントと等しいと置くと、式(6)aの関係をj用いて弾塑性境界位置 c の変化が求められ、また、式(6)bより中立軸の変化も求められる。

ここでは、結果の1例として、終局状態(図-3(d)参照)

における弾塑性境界位置 c_u について、はり理論と比較した結果を示す。この c_u は、式(5)の応力分布式で、 $\bar{x} = h_0$ において $\sigma = \sigma_r$ と置いた場合の ζ と、式(6)aで $c = c_u$ の時 $\zeta = \zeta_u$ と置いたものを等しいとして求められ、これらは結局、引張強度 σ_r 、圧縮強度 σ_c およびせん断変形に関するAの関数となる。

表-1に、各荷重状態について3種類の強度比 σ_r/σ_c に対する c_u と比較したものを示す。表中の値は、桁高に対する比 c_u/h で示しており、また、計算の際、弾性係数比 $E/G=20$ を用いた。この弾性係数比の値は、ここで選んだ強度比 σ_r/σ_c とともに、杉の集成材を対象として与えたものである。

はり理論では、分布荷重と集中荷重による違いはなく等しい値となるが、せん断変形理論では、荷重状態により値が変化し、また、寸法比 $2h/l$ によっても値は変わる。両理論の違いは、分布荷重よりも集中荷重において、また、寸法比 $2h/l$ が大きいほど著しいことが分かる。

引用文献：土木学会第39回年次講演会概要集第I部門p. 353, 1984年

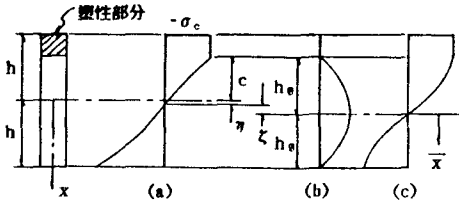


図-3 弾性部分の応力の求め方

表-1 弾塑性境界 c_u の比較

	$\frac{\sigma_r}{\sigma_c}$	はり理論	せん断変形理論	
			$2h/l=0.1$	$2h/l=0.2$
分布	1.5	0.600	0.605	0.622
	2.0	0.333	0.338	0.354
	2.5	0.143	0.146	0.155
集中	1.5	0.600	0.701	0.843
	2.0	0.333	0.439	0.641
	2.5	0.143	0.207	0.373