

I - 2 積分方程式によるはりの固有振動解析について

岩手大学工学部	正 員	○出戸 秀明
岩手大学工学部	正 員	岩崎 正二
日本大学工学部	正 員	五郎丸英博
岩手大学工学部	正 員	宮本 裕

1. まえがき

はりの横振動の固有振動解析には多くの方法があるが、この論文は無限長はりの静的曲げ問題の基本解を用いた境界積分方程式の適用について論じたものである。著者らは基本解の適用できないはりに対して、等断面はりの静的曲げ問題の基本解を用い、はりの内点に未知たわみをとることにより境界積分方程式を定式化し数値解析を行なった。また、実験による結果の考察も行なっている。

2. 解析理論

はりの回転慣性とせん断変形を無視するなら、はりの自由振動は次のような偏微分方程式で表わされる。

$$E_0 I_0 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left\{ \alpha(x) \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \right\} + \rho A_0 \beta(x) \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

ここで、 w ははりのたわみ、 $E_0 I_0$ 、 A_0 はそれぞれはりの基準点での曲げ剛性および断面積を表わす。 ρ は単位体積質量を、 $\alpha(x)$ 、 $\beta(x)$ はそれぞれ曲げ剛性と断面積の変化を表わす関数である。

式(1)の解を式(2)のように表わす。ここで $w(x)$ は x のみの関数を、 λ は円振動数を表わす。

$$w(x, t) = w(x) \exp(i \lambda t) \quad (2)$$

式(2)を式(1)に代入し、はりの静的曲げ問題の基本解 $w^*(x, y)$ を乗じ、スパン l にわたって a から b まで積分し式(3)を得る。

$$\begin{aligned} \alpha(y) w(y) = & \left[Q(x) w^*(x, y) - M(x) \theta^*(x, y) + \theta(x) \alpha(x) M_0^*(x, y) \right. \\ & \left. - w(x) \left\{ \frac{d\alpha(x)}{dx} M_0^*(x, y) + \alpha(x) Q_0^*(x, y) \right\} \right]_{x=a}^{x=b} + \int_a^b w(x) \left\{ \frac{d^2 \alpha(x)}{dx^2} M_0^*(x, y) \right. \\ & \left. + 2 \frac{d\alpha(x)}{dx} Q_0^*(x, y) \right\} dx + \rho A_0 \lambda^2 \int_a^b w(x) \beta(x) w^*(x, y) dx \end{aligned} \quad (3)$$

ここで、 $\theta(x) = \frac{dw(x)}{dx}$ 、 $M(x) = -E_0 I_0 \alpha(x) \frac{d^2 w(x)}{dx^2}$ 、 $Q(x) = -E_0 I_0 \frac{d}{dx} \left[\alpha(x) \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \right]$

$$\theta_0^*(x, y) = \frac{\partial w_0^*(x, y)}{\partial x}, \quad M_0^*(x, y) = -E_0 I_0 \frac{\partial^2 w_0^*(x, y)}{\partial x^2}, \quad Q_0^*(x, y) = -E_0 I_0 \frac{\partial^3 w_0^*(x, y)}{\partial x^3}$$

等断面はりの基本解を用いたことにより、未知関数 $w(x)$ を含む積分項が式(3)の中に現われる。その積分項を計算するため、スパンの中にいくつかの代表点のたわみを未知数に加えて離散化する。

ここでは、スパンを n 分割とし曲線近似しているため $2n+1$ 本の式に離散化されることになる。

さらに式(3)を y について微分した式から両境界点での2本の式を誘導し、 $2n+3$ 本の式を得る。これらの式をマトリックス方程式に変換し次式のように表わす。

$$[K] \{\bar{w}\} - \rho A_0 \lambda^2 [D] \{\bar{w}\} = 0 \quad (4)$$

ただし、 $\{\bar{w}\} = \{w_1, w_2, w_3, \dots, w_{2n+1}, Q(b), M(b), \theta(b), Q(a), M(a), \theta(a)\}^T$

ここで T は転置ベクトルを表わす。式(4)の $2n+7$ 個の未知数は4つの境界条件から $2n+3$ 個になる。

式(4)に $[K]^{-1}/\rho A_0 \lambda^2$ を乗ずることで、次のような固有振動方程式を得る。

$$[H] \{w\} = \bar{\lambda} \{w\} \quad (5)$$

ここで、 $[H] = [K]^{-1} [D]$ 、 $\bar{\lambda} = 1/\rho A_0 \lambda^2$ 、 $\{w\} = \{w_1, w_2, w_3, \dots, w_{2n+1}\}^T$

式(5)の固有値をエバーライン法により計算する。

3. 測定値と数値解析結果の比較

実験方法は、Fig. -1に示すように実験体の自由端部を先端にフォースゲージを取り付けたインパルスハンマーにより衝撃加振した。実験体の応答加速度は、実験体の自由端部に加速度ピックアップを取り付けて測定した。そして、フォースゲージからの信号を入力とし、加速度ピックアップからの信号を出力として2チャンネルFFT分析器により周波数応答関数を求めた。加振は1実験体について5回繰り返し実施し、5回の測定データを定振幅平均処理を施すことにより、できるだけ雑音の除去を行なった。固有振動数は、コ・クアド線図において虚数部の最小値を与える周波数から決定した。

実験体の形状寸法をFig. -2に示す。固定端部の断面は、高さ $h=1\text{cm}$ で幅 $b=10\text{cm}$ とし、自由端部断面を係数 C に従って変化させ、5種類とした。なお材質は比重1.19の亚克力を使用した。ヤング係数 E は、 $C=0$ (等断面) の場合の実験で得られた固有振動数から逆算し、その結果は $E=36200\text{kg/cm}^2$ である。

Fig. -3に $C=0.5$ の場合の測定結果を、Table-1に実験による測定値と数値計算結果を示す。数値計算はFEMについても行い、BEMによる計算結果とほぼ一致している。また実験結果もよく一致していることがわかる。

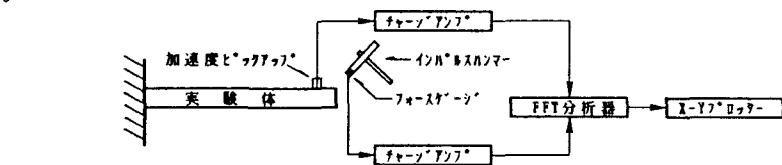


Fig. -1 実験装置

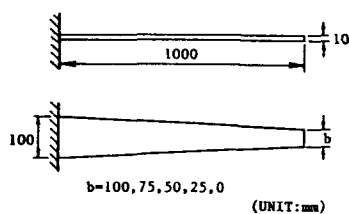


Fig. -2 実験体の形状寸法

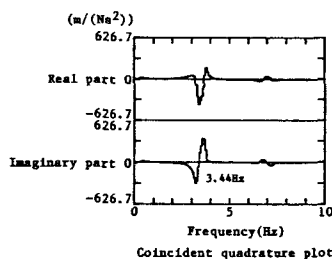


Fig. -3 $C=0.5$ の測定結果

Table-1 測定値と数値解析結果の比較

model	C	b (mm)	Experiment (Hz)	μ		
				Experiment	F E M	B E M
A	0.00	100	2.96	1.877	1.8751	1.8751
B	0.25	75	3.28	1.976	1.9590	1.9587
C	0.50	50	3.44	2.024	2.0773	2.0773
D	0.75	25	4.32	2.268	2.2684	2.2684
E	1.00	0	5.92	2.654	2.6752	2.6751

【参考文献】

- 1) Deto, H., Miyamoto, Y., Iwasaki, S. and Watanabe, N. (1986) On Analysis of Beam by Boundary Integral Equation Method, The Technology Reports of the Iwate University Vol.20, pp.27-38
- 2) Deto, H., Iwasaki, S. and Miyamoto, Y. (1987) BEM Approach to Analysis of Beam Structures, Proceedings of the 1st Japan-China Symposium on Boundary Element Methods, pp.241-250
- 3) 小笠原集, 宮本裕, 岩崎正二, 出戸秀明 (1988) 境界要素法によるはりの固有振動解析, 土木学会第43回年次学術講演会講演概要集, I-411
- 4) 出戸秀明, 岩崎正二, 宮本裕, 五郎丸英博 (1988) 境界要素法による変断面はりの固有振動解析, 境界要素法研究会, 境界要素法論文集第5巻, pp149-154