

I - 1 変位法系列の各種高次平板理論の動的な精度特性

福島工業高等専門学校 正員 根岸嘉和
同 押山弘之
同 佐々木晋

① 緒 言 本報告においては、変位仮定に基づく断面積分型の高次平板理論において上下表面の境界条件を考慮した理論を定式化し、他の変位仮定理論との関係を明かに示すとともに、数値例を通じて精度の検証を行い、変位法系列の高次平板理論において表面の境界条件を考慮することの影響について検討する。

② 理論の定式化

Fig. 1 に示す平板の動的変位 U_j ($j=x, y, z$) を次式のように仮定する。

$$u_j = \sum_{m=0}^{\infty} \xi^m u_{j,m}(x, y, t) \cdots \cdots (1)$$

上下表面での境界条件を満足した断面積分型の動的な平板理論の支配式を得るために、次のような変分原理を用いる。

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \{ T - U + \eta_{z,j} \pm F_{j,z} \} dt = 0 \cdots \cdots (2)$$

ここに、 T は運動Energy、 U はPotential Energyの各関数である。また、Lagrange 乗数 $\eta_{z,j}^{\pm}$ の乗ぜられた $F_{j,z}^{\pm}$ は上下表面での境界条件式であり、一般に

$$F_{j,z}^{\pm} = \sigma_{z,j} \pm \sigma_{z,j} \cdots \cdots (3)$$

のような式となる。

以上の変分を実行して得られる支配式を、簡単のために、自由表面をもつ平板の x - z 面内の問題について示すと、次式のようなものである。

断面力の運動方程式：

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^{\infty} B_m^n \{ (m+1) \lambda - n \mu \} u_{z(m+1),x} - \\ & n \{ (m+2) \mu u_{x(m+2)} + (\lambda + 2\mu) u_{x(m),xx} \} \\ & + \{ -\lambda \eta_{z,z,x} + (n/c) \mu \eta_{z,z} \} \\ & = \rho \sum_{m=0}^{\infty} B_m^n \ddot{u}_{x(m)} ; B_m^n = \int_{-1}^1 \xi^m \xi^n d\xi, \\ & \sum_{m=0}^{\infty} B_m^n \{ -n(m+2) (\lambda + 2\mu) u_{z(m+2)} + \\ & \{ (m+1) \mu - n \lambda \} u_{x(m+1),x} + \mu u_{z(m),xx} \} \\ & + \{ (n/c) (\lambda + 2\mu) \eta_{z,z} - \mu \eta_{z,z,x} \} \\ & = \rho \sum_{m=0}^{\infty} B_m^n \ddot{u}_{z(m)} \cdots \cdots (4) \end{aligned}$$

表面の境界条件式：

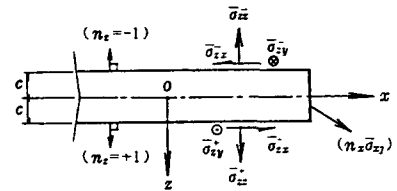


Fig. 1 Geometry of plate and coordinate system.

Table 1 Phase velocity $\bar{c}$ ($\bar{c}=c_g/\sqrt{\mu/\rho}$) of lower some thickness modes ($\bar{k}=k/(\pi/2c)=1.0, \nu=0.3$).

Theory	A1	S1	A2	S2	S3	A3
Ln	2nd 0.7856	1.4220	1.9924	2.1275	-	-
	3rd 0.7745	1.4142	1.9080	2.0023	2.8622	3.1866
	4th "	"	1.9073	2.0012	2.8262	3.0795
	5th "	"	"	"	2.8255	3.0772
Gn	1st 0.8351	1.5828	2.2402	2.5000	/	/
	2nd 0.7778	1.4167	1.9445	2.0511	3.2711	4.3208
	3rd 0.7745	1.4142	1.9076	2.0018	2.8479	3.1441
	4th "	"	1.9073	2.0012	2.8259	3.0787
	5th "	"	"	"	2.8255	3.0722
Mn	1st 0.9430	1.3522	2.1171	2.2502	/	/
	2nd 0.8075	1.4244	1.7211	1.7885	2.5466	2.4166
	3rd 0.7766	1.4138	1.9536	2.0872	-	-
	4th 0.7746	1.4142	1.9034	1.9945	2.7304	2.8231
	5th 0.7745	"	1.9075	2.0017	2.8637	-
Exact	0.7745	1.4142	1.9073	2.0012	2.8255	3.0772

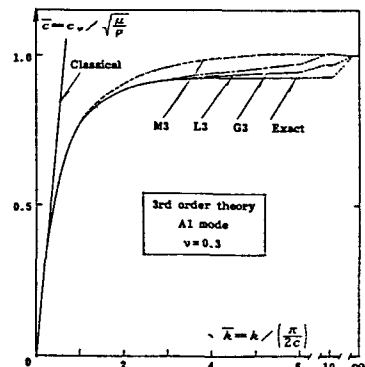


Fig. 2 Phase velocity spectrum $\bar{c}$ versus $\bar{k}$ (A1).

$$\sum_{m=0}^{\infty} \{ (m/c) u_{x(m),x} + u_{x(m-1),x} \} = 0,$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \{ \lambda u_{x(m-1),x} \}$$

$$\{ + (m/c) (\lambda + 2\mu) u_{x(m),x} \} = 0 \dots (5)$$

③ 他の変位仮定型理論 上述の理論と式(1)の仮定から出発する他の高次近似理論との関係について示すと、通常的一般化高次理論(Gn)は、支配方程式のうち式(5)を無視し、さらに式(4)において下線部を削除したものである。また、非積分型の微小点量理論(Mn)は、支配式として境界条件式(5)を用いるとともに運動方程式に関しては Navier の方程式に式(1)を代入し、これを m の同次数ごとの式に区分化した次式応力の運動方程式：

$$\{ (m+1)/c \} (\lambda + \mu) u_{x(m+1),x} + \{ (m+1)(m+2)/c^2 \} \mu u_{x(m+2)} + (\lambda + 2\mu) u_{x(m),xx} = \rho \ddot{u}_{x(m)},$$

$$\{ (m+1)/c \} (\lambda + \mu) u_{x(m+1),x} + \{ (m+1)(m+2)/c^2 \} (\lambda + 2\mu) u_{x(m+2)} + \mu u_{x(m),xxx} = \rho \ddot{u}_{x(m)} \dots (6)$$

を満足するものである。これら各理論の理論特性を3次元問題の場合について比較すると次表のようになる。

理論	支配方程式		n 次理論式数		変位の 次数	類型理論
	運動	境界	運動	境界		
Ln	断面力 と乗数	○	6n	6	(2n-1)	Drumheller -Bedford ³⁾
Gn	断面力	×	6n	0	(2n-1)	Lo et.al. ⁴⁾
Mn	応力	○	6n	6	2n	Cheng ⁵⁾

④ 数値計算例 これらの各次数の理論を用い、無限板中を伝播する平面調和波(波数 k 、位相速度 c_p)の分散解析を行った結果を Table 1 および Fig. 2—Fig. 5 に示す。これらの結果より 1. 本理論は構造的にも精度的にも、表面境界条件を無視した断面積分型の一般化高次理論(Gn)と、これを考慮した非積分型の微小点量理論(Mn)との中間に位置する理論である。2. 表面の境界条件の考慮は必ずしも精度向上につながるものではない。3. 全般に Gn 理論が最も優れている。等がわかる。

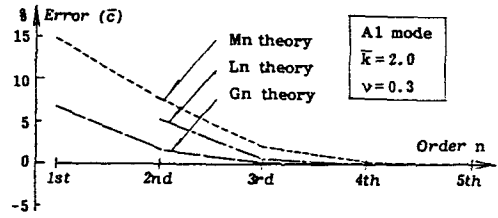


Fig. 3 % errors of phase velocity $\bar{c}$ ($k=2.0$).

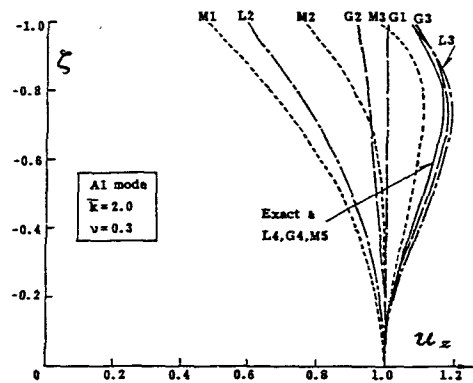


Fig. 4 Thickness mode of u_x in A1 mode ($k=2.0$).

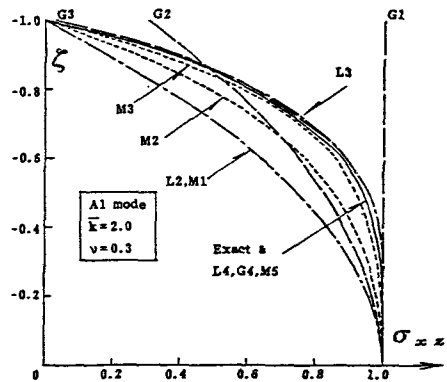


Fig. 5 Thickness mode of σ_{xx} in A1 mode ($k=2.0$).

参考文献 1) 平島 & 根岸：土木学会論文報告集，第333号，pp. 21-34，1983. 2) 根岸 & 吉沢：土木学会東北支部技術研究発表会講演概要，pp. 15-16，1986. 3) Drumheller, D. S. & Bedford, A. : Int. J. Solids Structures, Vol. 10, pp. 61-76, 1974. 4) Lo, K. H., Christensen, R. M. & Wu, F. M. : J. Appl. Mech., Vol. 44, pp. 663-668, 1977. 5) Cheng, S. : J. Elasticity, Vol. 7, No. 3, pp. 329-335, 1977.