従長軸について

八戸工業大学 土木工学科 正会員 岩渕清行

1. はじめに 直線あてはめに関し、昨年この会で発表した時、不明の点と云っていたことが わかりましたので、述べさせていただきたいと思います。題目の従長軸とは、昨年は *Reduced Major Axis* と書いたものですが、まだ定着した訳語はないので私製訳語をかいてみたものです。

2. 問題点は何であったか。問題は、直線あてはめの一般理論が、特殊な場合についての昔からみとめられている解を与え得ないのは何故か とゆうことでした。(それが合うように なりました。)

3. 新しい手法. 新しく私が考えた解き方は、 考え方は簡単なものであって、要するに、与えられた問題をそのまゝ解くとゆうだけのことです。あえてむづかしい用語を使って云うならば、線形化 を<u>やめる</u>とゆうことです。当然のことながらこれが可能になったのは、プログラム付電卓のおかげです。あたえられた方程式を解くのが目的ですから、さっそく、数値例題を示すことにします。(10桁電卓による。)

4. 数値例題(その1)『直線 $y=ax+b$ が 三点を通るようにあてはめなければなりません。データは表1の如くにあたえられています。すべての観測された座標値は独立です。p_{xi} は x_i の重さであり、p_{yi} は y_i の重さです。この条件のもとで、最小2乗法により パラメータ a, b の値を求めなさい。』

表1

点	x_i(cm)	y_i(cm)	P_{xi}	P_{yi}
1	2.00	3.20	25.0	10.0
2	4.00	4.00	25.0	12.5
3	6.00	5.00	25.0	12.5

表1は、有名な、ミカイルの何冊かある測量に関する3本のうちの1つで、Gordon Gracie との共著である所の *Analysis and Adjustment of Survey Measurements*, NOSTRAND REINHOLD, (1981) の237頁にかいてある EX9-1 の表をちょっとかえてみたもので ミカイルの本では P_{xi} の所が σ_x^2(cm²) で、P_{yi} の所が σ_y^2(cm²) で与えられている。$P_{xi}\equiv 1/\sigma_{xi}^2$, $P_{yi}\equiv 1/\sigma_{yi}^2$ としているため、表1はミカイルの本にある表とまったく同じと云ってもよい。何故この表をここに示すかとゆうわけは、私が知っている限りでは、測量の本であって、両軸に誤差がある時の(しかも一般的な誤差がある時の)数値解を示しているのはこれだけだからである。解法の考え方は、 $y_i+\Delta y_i=(x_i+\Delta x_i)*a+b$; $i=1,2,\ldots,n$; $n=3$ (一般には $n\geqq 3$) とゆう条件方程式を、都合のよい目的関数である所の

$$f\equiv\sum_{i=1}^{n}(P_{xi}*\Delta x_i^2+P_{yi}*\Delta y_i^2)$$

最小となる如く解くことである。ここにあらわれた $\Delta x_i, \Delta y_i$ は、未知数であり、当然 a, b も未知数である。これから出てくる所の普通に解ける連立方程式は、ラグランジュの未定係数を λ_i として、ラグランジュ関数を $g\equiv \frac{1}{2}f+\sum_{i=1}^{n}(\lambda_i*\varphi_i)$ とおくとき (ここに $\varphi_i\equiv y_i+\Delta y_i-a(x_i+\Delta x_i)-b$) 次のようになる。これは未知数の数と方程式の数が同じで、普通に解ける連立方程式である。

$$\left.\begin{array}{ll}(イ) & \varphi_i=0\\ (ロ) & \partial g/\partial\Delta x_i=0\\ (ハ) & \partial g/\partial\Delta y_i=0\\ (ニ) & \partial g/\partial a=0\\ (ホ) & \partial g/\partial b=0\end{array}\right\}\longrightarrow\left\{\begin{array}{l}y_i+\Delta y_i=a(x_i+\Delta x_i)\\ \Delta x_i=a\lambda_i/p_{xi}\\ \Delta y_i=(-)\lambda_i/p_{yi}\\ \sum_{i=1}^{n}(x_i+\Delta x_i)\lambda_i=0\\ \sum_{i=1}^{n}\lambda_i=0\end{array}\right\}\cdots\cdots(1)$$

この方程式を解くために、元数をおとしていくことを考えるに、まづ(ロ)と(ハ)を(イ)に代入して

$$\lambda_i=\frac{a x_i+b-y_i}{(-)(1/P_{yi}+a^2/P_{xi})}\quad\cdots\cdots(ヘ)$$

(ニ)に(ロ)を代入した式に (ハ)式を代入すると

$$\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{1}{(1/p_{y_i}+a^2/p_{x_i})^2}\left(ax_i+b-y_i\right)\left(\frac{x_i}{p_{y_i}}-\frac{a\cdot b}{p_{x_i}}+\frac{a\cdot y_i}{p_{x_i}}\right)\right\}=0 \quad \cdots\cdots (\text{ト})$$

(ホ)に λ_iを代入して変形すると.

$$b=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{y_i}{1/p_{y_i}+a^2/p_{x_i}}\right)-\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{1/p_{y_i}+a^2/p_{x_i}}\right)*a}{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{1/p_{y_i}+a^2/p_{x_i}}\right)} \quad \cdots\cdots (\text{チ})$$

従って. この b を (ト) に代入すると.

$$F(a)=0 \quad \cdots\cdots (\text{リ})$$

とゆう、aのみの分数方程式が得られる。視察によりわかる如く. 分母、分子を通分していくと最後に 分子は aの10乗, 分母は aの12乗を 最高次数とする 分数方程式になるから. 特別な p_{x_i}やp_{y_i}を与えないかぎり. $F(a)$ は $\pm\infty$を零点とする函数であることがわかる.

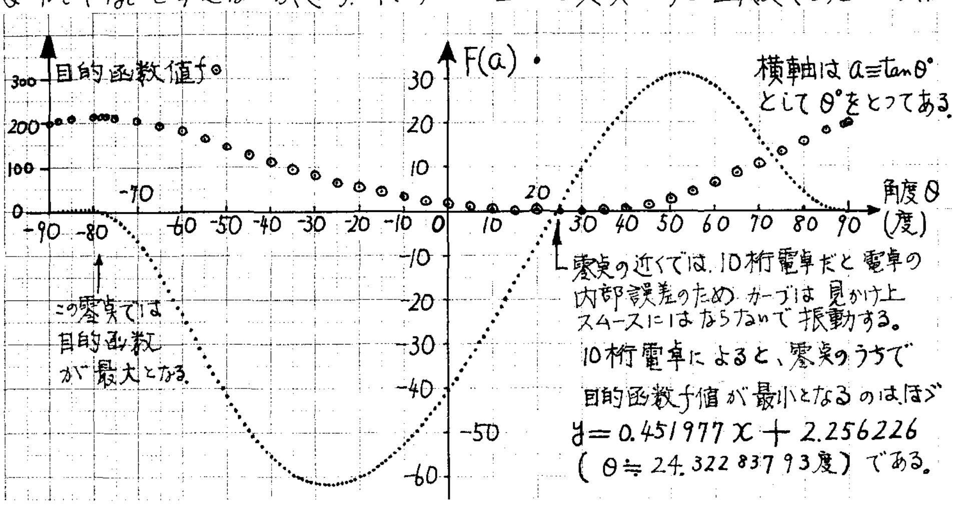

図1。表1のデータの時の $F(a)=0$ の 左辺函数の零点を見るためにかいたグラフ. fの値も示す。零点のためのグラフが描けるとゆうことは $F(a)=0$ の根が求められるとゆうことである。(之を力(チカラ)まかせの解と云う)

5. 数値例題(その2) 表2のデータの時の最小2乗法による 直線 $y=ax+b$ の決定

表2 〔この表は 米谷栄二・山田善一共著 新版測量学 一般編. 丸善. 第6版11刷 (昭和58年) の P.363より うつす.〕

$$\begin{cases} x=0.969,\ 0.890,\ 0.613,\ 0.095,\ 0.051 \ ; \quad p_{x_i}=1 \ (\text{すべての}\ i\ \text{において}) \equiv C_1 \\ y=9.215,\ 9.195,\ 9.139,\ 9.035,\ 9.024 \ ; \quad p_{y_i}=4 \ (\text{仝上}) \equiv C_2 \end{cases}$$

〔解答〕このように、$p_{x_i}\equiv C_1$, $p_{y_i}\equiv C_2$ と表わせる場合 $C\equiv C_1/C_2$ とおくと. 上記 (リ) の方程式は、((チ)の式が $b=[y]/n-[x]/n*a$ となるために.) Econometrics では おなじみの

$$a^2-(s_y^2-C\cdot s_x^2)/s_{xy}\cdot a-C=0 \quad \cdots\cdots (\text{リ})'$$

となる。ここに $s_x^2\equiv n[x^2]-[x]^2$, $s_y^2\equiv n[y^2]-[y]^2$, $s_{xy}\equiv n[xy]-[x][y]$ である。この場合には、零点を見るためのグラフをかくと. $a=\pm\infty$で ∞となる. しかし零点は 二ケある. そのうち、目的函数値 $f\equiv\sum_{i=1}^{n}(p_{x_i}*\Delta x_i^2+p_{y_i}*\Delta y_i^2)$ の小さい方 の aが 答のaとなる。勿論この場合には、普通の二次方程式の根の公式で求めればよいわけである。答はほぼ $y=0.20503x+9.0142$。線形化された条件方程式 からの一般解からは、(リ)'の方程式は 求め得ない。線形化するとゆうことは y on x regression line と x on y regression line を 同一視することである。(デミングの本より。)