粒状体の流動的性質：速度分布関数についての一考察

東北大学工学部　正員　中川昌美

1．まえがき

年々のように多くの人命を奪う自然災害の一つに土石流があるが、その突発性及び流動性の為に対策・予測の困難さが指摘されている。　一般に土石流とは水と高濃度の粒子が高速で流動する状態を示すが、流動中の粒子同士の頻繁な衝突及び接触が、その特徴であると考えられる。　ここでは、土石流のマイクロメカニズムを検討する第一歩として、二粒子間の衝突機構を統計的に処理することにより、粒状体の流れとしての性質を表現しうる理論についての考察を行う。　尚、粒子間の衝突が運動量の輸送に大きく影響することを仮定し、水の影響を無視できる場合のみを考慮する。

2．解析手法の背景・結果

高速変形下に於ける粒状体の流動的性質を考える。　古典的気体運動論を、有限な大きさを持ち、非弾性体で粗な表面を有する粒子の集合体の流体としての性質を取り扱える理論に発展させるために数多くの研究がなされてきた。　いずれも、二体衝突のみを考慮した議論の展開のみに終止していると思われるが、この種の解析手法としては、一応の体系づけがなされた。　気体運動論的手法を用いるにあたり、常に問題とされるのが粒子の速度分布関数である。　通常、速度分布関数は粒子の動向の細部観察に基づいて、仮定されるが、Jenkins・Richiman[1]らは Enskog の"粒子集団内の混沌"の仮定に基づいて、Grad[2] のモーメント法を発展させ、高密度での単純せん断流を支配する速度分布関数を求めた。　均一な粒状体の平衡状態を表現し得る等方的マックスウェリアンのパータベーションであるが、最も観測的仮定要素の少ない、速度分布関数の一つである。　より洗練された速度分布関数を用いることにより、より現実にそった流れのモデル化は可能ではあるが、実際には計算過程が非常に複雑化する。　従って、上記のような手法による不均一粒状体の流れへの応用もそれが要因となり停滞している。

これとは対照的に、Shen・Ackermann[3] や Ogawa et.al[4] らは、 マックスウェリアン速度分布関数をデルタ関数で置換するのと同様な作業を行う事により、粗雑ではあるが、計算過程の簡略化に成功している。　そこで、ここでは、粒子径σ、質量 m の非弾性球の集合体の流動的性質の考察のためデルタ関数に基づいた速度分布関数を明確に定義し、その結果得られる構成式の信頼性を確認する。

粒子速度 $\underline{c}$ を考慮し、その任意の関数を $\psi(\underline{c})$ とする。 一般に、速度分布関数を $f(\underline{c},\underline{r},t)$ とすれば、$\psi(\underline{c})$ の平均値は

$$n\langle\psi\rangle \equiv \int \psi(\underline{c})\, f(\underline{c},\underline{r},t)\, d\underline{c} \tag{1}$$

で求まる。 ここで、n は局所粒子密度、$\underline{r}$ は粒子の位置ベクトル、$d\underline{c}$ は速度空間に於ける体積要素を現す。 式(1)で、$\psi = \underline{c}$ と置くと粒子の平均速度 $\underline{u}$ が求まる。 さらに粒子速度と平均速度の差として、"ゆらぎ速度" $\underline{\mathbb{C}}$ が $\underline{\mathbb{C}} \equiv \underline{c} - \underline{u}$ で定義される。$\langle\underline{\mathbb{C}}\rangle = 0$ である。 このように定義された任意のゆらぎ速度 $\underline{\mathbb{C}}$ の関数 $\Psi(\underline{\mathbb{C}})$ の輸送方程式は次式で表現される。

$$\begin{aligned} &D\langle\rho\Psi\rangle/Dt + \langle\rho\Psi\rangle\partial u_\varphi/\partial r_\varphi + \partial\langle\rho\mathbb{C}_\varphi\Psi\rangle/\partial r_\varphi + \rho[Du_\varphi/Dt - F_\varphi/m]\langle\partial\Psi/\partial\mathbb{C}_\varphi\rangle \\ &+ \langle\rho\mathbb{C}_\eta\partial\Psi/\partial\mathbb{C}_\varphi\rangle\partial u_\varphi/\partial r_\eta = \mathbb{E}(m\Psi) \end{aligned} \tag{2}$$

ここで、$\underline{F}$は外力、D/Dt は平均速度で移動している体積に関する実質的な微分で、右辺の項 $\mathbb{E}(m\Psi)$ は衝突による $\Psi(\underline{\mathbb{C}})$ の変化率を表し、

$$\mathbb{E}(m\Psi) = \tfrac{1}{2}\int \Delta\Psi\, \hat{f}(\underline{\mathbb{C}}_1,\underline{r}-\sigma\underline{k},\underline{\mathbb{C}}_2,\underline{r})\ \sigma^2(\underline{g}\cdot\underline{k})d\underline{k}d\underline{\mathbb{C}}_1 d\underline{\mathbb{C}}_2 \tag{3}$$

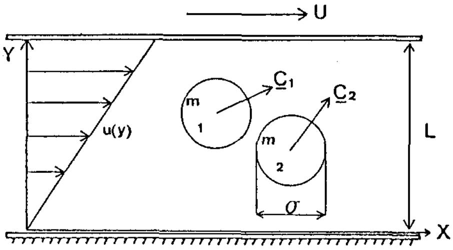
で定義される。 尚、$\Delta\Psi \equiv \Psi_1' + \Psi_2' - \Psi_1 - \Psi_2$, $\hat{f}$ は $\underline{r}-\sigma\underline{k}$ と $\underline{r}$ に置かれた二粒子速度分布関数，及び $\underline{g} = \underline{\mathbb{C}}_1 - \underline{\mathbb{C}}_2$ である。

デルタ関数による速度分布関数の近似を次に定義する。

$$\hat{\delta} \equiv n/6\sqrt{3}\pi T^{3/2} \quad \delta(\mathbb{C}^2/3T - 1) \ . \tag{4}$$

ここに T は粒状体温度で $T \equiv 1/3 \langle \mathbb{C}^2 \rangle$ と定義される。 尚、参考までに、マックスウェリアン速度分布関数は通常次のように定義される。

$$f \equiv n/(2\pi T)^{3/2} \quad \exp(-\mathbb{C}^2/2T) \ . \tag{5}$$



単純せん断流

Jenkins・Richman[1] は右図に示すような単純せん断流を考慮した時のエネルギー式より、パラメータ $R \equiv \sigma U/LT^{1/2}$ の絶対値が小さいという条件のもとに、非弾性体粒子の衝突による散逸エネルギー $\gamma \equiv -\frac{1}{2}\,\mathbb{C}(\frac{1}{2}m\mathbb{C}^2)$ をマックスウェリアンのパータベーションを用いて計算すると、その絶対値が小さいという制約が理論を展開する上で必要であると述べている。 上式(4)に定義された速度分布関数を用いて導かれた γ が Jenkins・Richiman[1] のそれとどう対応するかを以下に示す。

式(3)に於いて、$\Delta\Psi \equiv \frac{1}{2}m(\mathbb{C}_1'^2 + \mathbb{C}_2'^2 - \mathbb{C}_1^2 - \mathbb{C}_2^2)$ 及び、密な粒状体中における粒子1及び粒子2の位置の相関関係を表すラジアル分布関数をg_0として $\hat{f}(\underline{\mathbb{C}}_1, \underline{r}-\sigma\underline{k}, \underline{\mathbb{C}}_2, \underline{r}) = g_0\hat{\delta}_1(\underline{\mathbb{C}}\ ,\underline{r})\hat{\delta}_2(\underline{\mathbb{C}}\ ,\underline{r}) = g_0(n/6\sqrt{3}\pi T^{3/2})^2\delta(\mathbb{C}_1^2/3T - 1)\delta(\mathbb{C}_2^2/3T - 1)$ と置くと、

$$\begin{aligned}\gamma &= g_0 m(1-e^2)n^2\sigma^2/864\pi^2T^3 \int (\underline{g}\cdot\underline{k})^3 \ \delta(\underline{\mathbb{C}}_1^2/3T-1)\delta(\underline{\mathbb{C}}_2^2/3T-1)d\underline{k}d\underline{C}_1 d\underline{C}_2 \\ &= 3\sqrt{3}\pi/5 \quad mg_0 n^2\sigma^2(1-e^2)T^{3/2} \equiv \gamma_D \end{aligned} \tag{6}$$

となる。 また、マックスウェリアンを用いた場合、

$$\gamma = 2\sqrt{\pi}\, mg_0 n^2\sigma^2(1-e^2)T^{3/2} \equiv \gamma_M \tag{7}$$

となる。

$\gamma_M/\gamma_D = 1.08$ から、少量の散逸エネルギーを伴う単純せん断流という単純な流れを仮定出来るような場合には、構成式もデルタ関数によりマックスウェリアンを用いた時とほぼ同程度に近似出来ることが示され、その計算過程がマックスウェリアンを用いた場合に比較して非常に簡略化されている。

3. あとがき

上記で取り扱われたような単純な粒状体の流動的性質を表現するにおいて、理論形成上重要な構成式である散逸エネルギー γ がデルタ関数を用いた速度分布関数により、マックスウェリアン速度分布関数を用いた時と同程度に近似される事が示された。 今後は、デルタ関数を用いて、異方的速度分布関数の近似を行い、その有効性を再確認するとともに、水と粒子の相互作用をも考慮した解析を行いたい。

参考文献

Spheres. Archive for Rational Mechanics and Analysis. 87, 355-377.

2. H. Grad, 1949. On the kinetic theory of rarefied gases. Comm. Pure and Appl. Math. 2, 331-407.
3. H.H. Shen and N.L. Ackermann, 1982. Constitutive relations for fluid-solid mixtures. J. Eng. Mech. Div., ASCE, 108, 748-763.
4. S. Ogawa, A. Umemura and N. Oshima, 1980. On the equation of fully fluidized granular materials. ZAMP, 31, 483-493.