砕波にいたる波形のモデル化

東北大・工　正員　○ 京藤敏達
東北大・工　正員　　首藤伸夫

1．はじめに　内部波もしくは水面波のように界面を有する流れは，それらの界面における非線形性が卓越するに伴い，砕波にいたる．したがって，その非線形性を考慮に入れない限り，砕波に到る現象の解析は困難である．本論文では，非線形性の卓越する自由表面の運動を解析的にモデル化する手法を提示する．また，すべて Lagrange 表記に基づく運動方程式を用いている．

2．自由表面の運動を支配する方程式

3次元流れの自由表面の運動を支配する方程式を導く．座標系は，水平面内に X軸，S軸をとり，鉛直上方にY軸をとる．また，自由表面上の Lagrange 変数を (a,c)とする．このとき，Lagrange の運動方程式は；$\ddot{X} = -P_X/\rho$，$\ddot{S} = -P_S/\rho$，$\ddot{Y} + g = -P_Y/\rho$　である．自由表面における圧力一定の条件より，未知関数 $X(t,a,c,0), S(t,a,c,0), Y(t,a,c,0)$ に対する２本の偏微分方程式；$\ddot{X}X_a + \ddot{S}S_a + (\ddot{Y} + g)Y_a = 0$, $\ddot{X}X_c + \ddot{S}S_c + (\ddot{Y} + g)Y_c = 0$　が得られる．

もう１本の方程式は自由表面に関して法線方向の圧力勾配の表示から求めることができる．自由表面上の２つの独立な接線ベクトルは　(X_a, S_a, Y_a) & (X_c, S_c, Y_c) であり，これらに直交するベクトル (α, β, γ) は $(\alpha, \beta, \gamma) = (S_aY_c - S_cY_a,\ Y_aX_c - Y_cX_a,\ X_aS_c - X_cS_a)$ となる．また，自由表面に外向き法線方向の圧力勾配 P_n は (α, β, γ) を用いて；$P_n = \mathrm{grad}P \cdot (\alpha, \beta, \gamma)/|(\alpha, \beta, \gamma)|$　で表される．この式にLagrange の運動方程式を代入すれば；$\ddot{X}\alpha + \ddot{S}\beta + (\ddot{Y} + g)\gamma = -P_n|(\alpha, \beta, \gamma)|/\rho$　を得る．

以上３本の方程式を整理すると，自由表面の運動方程式は，

$$\ddot{X} = r(S_aY_c - S_cY_a),\quad \ddot{S} = r(Y_aX_c - Y_cX_a),\quad \ddot{Y} + g = r(X_aS_c - X_cS_a) \tag{1}$$

となる．ここで r は自由表面における圧力勾配に関係する不定関数である．上式で，$S_c = 1$, $X_c = Y_c = 0$ とすれば，２次元流れの自由表面の運動を支配する方程式となる．

3．流体内部への解の接続

２章では，自由表面のみの流体粒子の運動方程式を求めたが，この章では自由表面における解から流体内部の解を構成する手法について述べる．

Lagrange の運動方程式から圧力項を消去するとその方程式は時間 t で１回積分でき，渦度の保存則が導かれる．この方程式系を複素数 $Z = X + iY$ を用いて表現すると，次のような１本の複素関数に対する偏微分方程式に変換される；$\dot{Z}_a \cdot Z_b - Z_a\dot{Z}_b{}^{\cdot} = C(a,b)$,　$\omega = -C/J$　．ここで，J はヤコビアン，ω は渦度である．この方程式は $\dot{Z}^{\cdot}(t,a,b) = F(t,Z,Z^{\cdot})$　と変数変換すると；$\partial F/\partial Z^{\cdot} = C/2iJ$　となり，次のように積分される[1]．

$$\dot{Z}^{\cdot} = -(1/2\pi i)\iint \hat{C}/(\hat{Z} - Z)\,d\hat{a}\,d\hat{b} + f(t,Z) \tag{2}$$

ただし，$\hat{C} = C(\hat{a},\hat{b})$, $\hat{Z} = Z(t,\hat{a},\hat{b})$　である．先程の渦度の保存則は，変数 b に関して１階の偏微分方程式であるから，自由表面 b=0において　$Z = Z(t,a)$ を与えれば解 $Z(t,a,b)$ は完全に決定される．特に，C=0の場合は F.John[2] が示したように a を媒介パラメータとして関数 $f(t,Z)$ を求めることができる．

4．不定関数の決め方

この章では，他の境界条件から不定関数を決定する方法を示す．ただし，流れは，すべて２次元渦なしであるとする．まず，自由表面における基礎方程式は式(1)から；$\ddot{Z} + ig = irZ_a$　で与えられる．この式を底面もしくは自由表面まで解析接続する．解析接続された関数は，その位置における境界条件を満足しなければならない．このようにして r に対する方程式が得られる．簡単のため，水平床上の水面波と流体層の落下運動であるRayleigh-Taylor問題に対して r が満足すべき方程式を導く．

《水平面上の水面波》　自由表面における解 $Z(t,a)$ から底面における解を求めるには変数 a を ζ に置

き換えれば良い ($Z(t,a)|_{a\to\zeta} = Z(t,\zeta)$)．また，$Z(t,\zeta)$ が底面における流体粒子の位置を表すための条件は；$\dot{Z}(t,\zeta^*) = \dot{Z}(t,\zeta) + Z_a(t,\zeta)\dot{\zeta}$ である．さらに，底面が平らな場合には，境界条件として次式が与えられる； $Z(t,\zeta) = Z(t,\zeta)^*$．ところで，式(1)は任意の a に対する方程式であるから，a を ζ もしくは ζ^* で置き換えた方程式も成立する； $\ddot{Z}(t,\zeta^*) + ig = ir(t,\zeta^*)Z_a(t,\zeta^*)$ ．以上の３式が未知関数 Z, ζ, r に対する方程式である．

これらの方程式から，時間に関する２階微係数を消去し，r に対する決定方程式を求めると，

$$r(t,\zeta)(\hat{Z}^*_a/\zeta_a) + r(t,\zeta^*)(\hat{Z}_a/\zeta^*_a)$$
$$= i(\Lambda^*\dot{\hat{Z}}_a - \Lambda\dot{\hat{Z}}^*_a + \Lambda\Lambda_a\hat{Z}^*_a - \Lambda^*\Lambda^*_a\hat{Z}_a + \Lambda^2\hat{Z}^*_{aa} - \Lambda^{*2}\hat{Z}_{aa} - 2ig) \quad (3)$$

が得られる．ここで，$\tilde{Z}$, $\hat{Z}$ および Λ は，

$\tilde{Z} \equiv Z(t,a)|_{a\to\zeta}$, $\hat{Z} \equiv Z(t,a)|_{a\to\zeta^*}$, $\Lambda \equiv \dot{\zeta}/\zeta_a$

で定義されている．

仮に，解析接続する変数 ζ が初期値；$\zeta \fallingdotseq a - iB$ で近似できるとき，上の方程式系は

$\ddot{Z}(t,a) + ig = ir(t,a)Z_a(t,a)$,

$r(t,a-iB)Z^*_a(t,a-iB) + r(t,a+iB)Z_a(t,a+iB) \fallingdotseq 2g$

となる．上式をさらに近似して，r を；$r = 2g/(Z_a(t,a) + Z_a(t,a)^*)$ として数値計算した結果を図１に示す．このように r を近似しても自由表面条件は完全に満足することに注意する．任意地形の場合にも同様の議論ができるが，この場合の具体的な数値計算および実際問題への適用は検討中である．

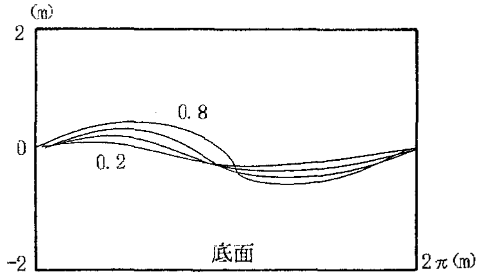

図１ 水面波の変形(t=0.2, 0.4, 0.6, 0.8sec)

《 Rayleigh-Taylor問題 》 流体層の落下運動を解析するときには，２つの自由表面を考慮しなければならない．この場合にも，上と同様の議論ができる．水面波のときと同様にして，自由表面１の条件式と，自由表面２（図２参照）における圧力一定の条件

$$\ddot{\hat{Z}} - \Lambda^*\dot{\hat{Z}}_a - \dot{\Lambda}^*\hat{Z}_a + ig = iR(t,a)\tilde{Z}_a, \quad (R \text{ は実数値関数}) \quad (4)$$

より，$r(t,a)$ と $R(t,a)$ に対する決定方程式；

$$r(t,\zeta^*)(\hat{Z}_a/\zeta^*_a) - R(t,a)\tilde{Z}_a = i(\Lambda^*\dot{\hat{Z}}_a - \Lambda^*\Lambda^*_a\hat{Z}_a - \Lambda^{*2}\hat{Z}_{aa}) \quad (5)$$

が得られる．

先と同様にして，解析接続する変数 ζ が初期値； $\zeta \fallingdotseq a + iB$ で近似できるとき，式(5)は； $r(t,a-iB)Z_a(t,a-iB) - R(t,a)Z_a(t,a+iB) = 0$ となる．上式に複素共役をとり，関数 r が流体内で特異点を持たないという条件から，r を求めると； $r(t,a) = \varkappa(t)/Z_aZ^*_a(t,a)$, ($\varkappa(t)$;実数値関数) となる．結局，Rayleigh-Taylor問題のモデル方程式は

$$\ddot{Z}(t,a) + ig = i\varkappa(t)/Z^*_a(t,a) \quad (6)$$

で与えられる．関数 $\varkappa(t)$ は流体層が重力場で静止するような自由表面における圧力条件のもとでは；$\varkappa(t) = g$ となる．具体的に，式(6)を使って流体層の落下運動をシュミレートした結果が図２である．G.R.Bakerら[3]の数値計算結果と比較すると，流体運動は定性的な一致を示す．

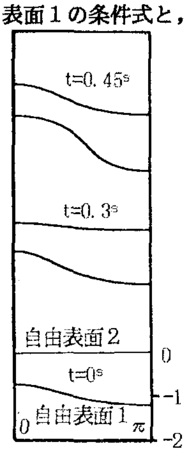

図２ Rayleigh-Taylor問題

5．まとめ

非粘性非圧縮性流体の自由表面の運動を記述する偏微分方程式を導出し，その方程式中に含まれる不定関数を決定する手法を示した．最後に，本研究の一部は，科研費『 非線形流れ問題の数値シュミレーション』（代表大橋秀雄）および『 微分摂動法を用いた非線形波動の解析』（代表 京藤敏達）によった．

参考文献 (1) John, Comm. P. Appl. Math., 6, 497-503(1953). (2) Courant and Hilbert, "Methods of mathematical physics", Vol. II Int. Pub. (1962). (3) Baker, et al., J.F.M. 178, 161-175 (1987).