

東北大学工学部 学生員 ○田口 康典
 東北大学工学部 正 員 真野 明
 東北大学工学部 正 員 沢本 正樹

1. はじめに

波の変形を解析する手段として、Berkhoff の緩勾配方程式がよく利用される。この式は、複雑な海底地形や構造物を考慮に入れて波の屈折・回折を数値計算できるため、その計算法が頻繁に研究されてきた。本研究においては、緩勾配方程式を変分原理で定式化して有限要素法で離散化することにより、屈折・回折現象を数値計算・出力図化するプログラムを作成し、理論値との比較から近似精度や適用性を検討する。さらに、一定水深および一様勾配海底地形に防波堤が存在する場合の屈折・回折現象を解析する。

2. 支配方程式と境界条件

Berkhoff の緩勾配方程式は次式で表される。

$$\nabla(C C_0 \nabla \phi) + \frac{C_0}{C} \omega^2 \phi = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

ここに、 C は波速、 C_0 は群速度、 ω は角速度であり、 ϕ は速度ポテンシャル Φ を

$$\Phi(x, y, z; t) = \phi(x, y, z) \exp(i \omega t) \quad \dots\dots\dots (2)$$

の形で、時間 t に関して変数分離したものである。また式(1)の境界条件は、 ∂A 上で次式となる。

$$-\frac{\partial \phi}{\partial \nu} + \frac{i \omega \alpha}{C} \phi = 2 \frac{i \omega t}{C} \phi^1 \quad \dots\dots\dots (3)$$

ここに、 ν は境界外向きの単位法線ベクトル、 ϕ^1 は入射波振幅で、波が入射しない境界ではこの項は0になる。また、 i は虚数単位、 α は反射率で、完全透過で $\alpha=1$ 、完全反射で $\alpha=0$ 、部分反射で $0 < \alpha < 1$ 、となる。

3. 有限要素定式化

式(1)の変分原理は次式となる。

$$\Pi(\phi) = \frac{1}{2} \int (\nabla C C_0 \nabla \phi)^2 - \frac{C_0}{C} \omega^2 \phi^2) dA - \frac{1}{2} \int i \omega \alpha C_0 \phi^2 ds - \int 2 i \omega \alpha C_0 \phi^1 \phi ds \quad \dots\dots\dots (4)$$

ここで、三角形の線形補間関数 f_i を使い $\phi = \sum \phi_i f_i$ を考えると、 $\frac{\partial \Pi}{\partial \phi_i} = 0$ より各 ϕ 値が求められる。

4. 理論値との比較

一定水深の有限要素モデル(図2の防波堤を取り除いたもの)を使って計算誤差を最初に検討する。 $\phi^1 = 1$ の平面波を直角入射させ周期や水深を種々変えて計算し、奥部(S_2 境界:完全反射)における出力結果を理論値と比較した。周期が短くなると理論値との誤差が大きくなり、また、与えている入射波が沿岸方向に一様であるにもかかわらず、沿岸沿いに波高変化が生じる。これらの誤差を示したのが図1であり、横軸は有限要素三角形の一辺の長さ

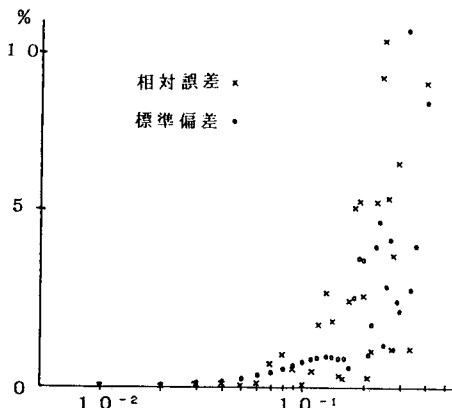


図1 モデルの誤差

波長との比 r をとり、縦軸には沿岸方向の平均波高の理論値との相対誤差を $\times$ 印で、また沿岸方向の波高変化の標準偏差を理論値の波高で割ったものを $\bigcirc$ 印で示した。これをみると、 $r=0.2$ を越えると両方の誤差は急に増加し、10%程度まで達する。誤差1%以下の精度を得る為には、 $r < 0.1$ が必要といえよう。

5. 結果

図2は、解析領域の有限要素メッシュ図である。海岸地形は、S1境界では水深 9.5m 奥部S2境界で 0.5m とする一様勾配を与えた。

図3は、図2の領域にS1境界から周期40sの波を与えたときの 流速ベクトルを出力したものである。入射波がS2境界で反射して防波堤開口部から外に出ていく様子がよくわかる。

図4は周期20sの波を与えたときの解析領域の等ポテンシャル線であり、同周期の波を与えた一定水深(5.0m)のモデル(図5)と比較すると、一定水深モデルは一様勾配モデルに比べて重複波の様子がはっきりと確認できる。また一様勾配モデルでは屈折・回折の様子は確認しにくい。S2境界付近では 等ポテンシャル線が沿岸方向に周期的に変化しており、エッジ波が生じているものと考えられる。

図6は周期40sの場合であり、周期20sのモデルに比べて防波堤付近での屈折・回折効果が大きく現れていることがわかる。

6. 今後の課題

細かいメッシュで一般の海岸に適用することや、任意の方向から入射する波に対応した沖側境界条件を組み込むことなどは、今後の課題である。

《参考文献》

P.Tong & J.N.Rossettos 矢川元基 訳：
 エンジニアのための有限要素法
 Berkhoff, J.C.W. : Computation of combined refraction-diffraction , Proc.13th Coastal Eng. Conf., ASCE, pp.470-490,1972.

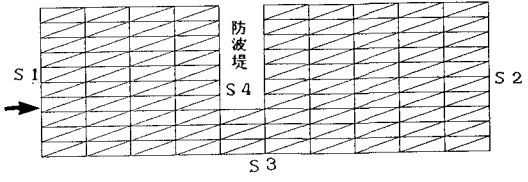


図2 有限要素メッシュ

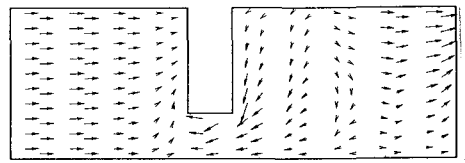


図3 流速分布

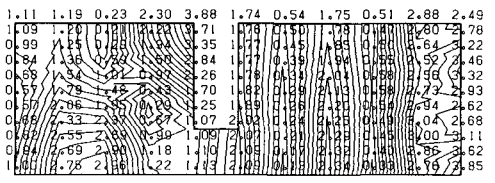


図4 等ポテンシャル線 (周期20s, 一様勾配)

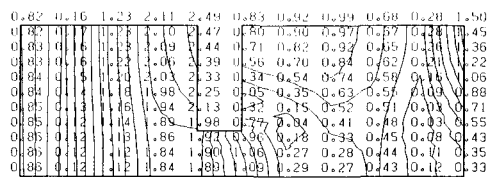


図5 等ポテンシャル線 (周期20s, 一定水深)

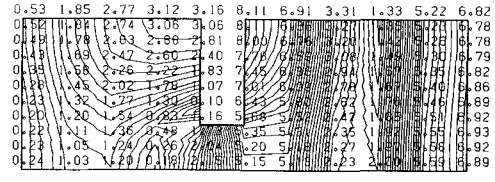


図6 等ポテンシャル線 (周期40s, 一様勾配)