

東北大学大学院 学生員○今村文彦  
運輸省港湾技研 正 員 後藤智明  
東北大学工学部 正 員 首藤伸夫

### 1. はじめに

著者らは津波伝播計算等を実施する際に生じる数値誤差についての検討を進めている。その中で、線形方程式系に関しては各種差分スキームの違いによる打ち切り誤差の特性や丸め誤差のオーダーの推定を行っている。しかしながら、浅海域などで無視することの出来ない移流項を含む非線形方程式系に対しては解析的扱いが困難なため、未だに数値誤差の性質は明らかにされていない。本研究では、津波計算に最も多く用いられているLeap-frog法により差分化された浅水理論の打ち切り誤差について、擬似微分方程式を導き解を求めることにより議論する。

### 2. 擬似微分方程式の誘導

1次元、水平床、摩擦ナシを仮定した浅水理論（水深で無次元化している）をLeap-frog法により差分化すると次式が得られる。

$$\begin{cases} \frac{1}{\Delta t}(\eta_{j+1/2}^{n+1/2} - \eta_{j+1/2}^{n-1/2}) + \frac{1}{\Delta x}(M_{j+1}^n - M_j^n) = 0 \\ \frac{1}{\Delta t}(M_j^{n+1} - M_j^n) + \left(\frac{M}{D}\right)x_j^{n+1/2} + \frac{D}{\Delta x}(\eta_{j+1/2}^{n+1/2} - \eta_{j-1/2}^{n+1/2}) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

$\eta$ ,  $M$ : 水位, 線流量,  $D$ : 全水深,  $(\Delta x, \Delta t)$ ,  $(j, n)$ : 空間, 時間格子間隔および番号

ここでは、負の数値拡散係数の発生を防ぐために移流項には風上差分を用いてる。この式と本来の浅水理論を比較するために、(1)式をTaylor級数により差分を微分に置き換える操作を行う。この場合、打ち切り誤差の第1項だけを考慮に入れると、

$$\begin{cases} \eta_{t+M_x} = -\frac{\Delta x^2}{24}\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \eta_{ttt+M_{xxx}} \\ M_{t+\left(\frac{M}{D}\right)x+D\eta_x} = -\frac{\Delta x^2}{24}\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \eta_{ttt+M_{xxx}} + \text{sgn}(M)\frac{\Delta x}{2}\left(\frac{M}{D}\right)_{xx} \end{cases} \quad (2)$$

が得られる。各式の左辺が本来の基礎方程式であり、右辺が差分化したことによる打ち切り誤差の項である。

(2)式のままでは打ち切り誤差の性質が理解しづらいので、 $x$ の正方向へ伝播する進行波を仮定し、両式から線流量 $M$ を消去すると、 $\eta$ に関する第一近似の擬似微分方程式を求めることが出来る。

$$\eta_{t+((1+\frac{3}{2})\eta_x - |\eta|\frac{\Delta x}{2})_{xx} - \text{sgn}(\eta)\frac{\Delta x}{2}(\eta_x)^2 + \frac{\Delta x^2}{24}(1-K^2))\eta_{xxx}} = 0, \quad K = \frac{\Delta t}{\Delta x} \quad (3)$$

式中で $\eta$ の2階微分は数値粘性を、3階微分は数値分散性を表している。数値粘性および左辺第4項は移流項から、数値分散性は移流項以外のものから生じている。

### 3. 擬似微分方程式の解

さらに、(3)式を具体的に解く事を考える。(3)式のような高次の非線形な微分方程式には解析解は存在せず、数値計算を行う事も困難である。特に、数値計算を行う際には $x$ に関する高次の微分項が問題となる。そこで、次式に表されるようなフーリエ変換により、 $t$ だけの常微分方程式に書き換える方法が有効であると考えられる。

$$\eta(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\eta}(\alpha, t) e^{i\alpha x} d\alpha, \quad \alpha: \text{波数}$$

さらに定性的な性質を知るために、(3)式での非線形項にある $\eta$ ,  $\eta_x$ の変化を小さいとして定数と見なし、線形化して扱うと、

$$\tilde{\eta}_t + i\alpha(1+\frac{2}{3}\eta - \frac{\Delta x}{2}\eta_x - \frac{(\alpha\Delta x)^2}{24}(1-K^2))\tilde{\eta} + \frac{\Delta x\alpha^2}{2}\eta\tilde{\eta} = 0 \quad (4)$$

となる。初期条件として、 $\tilde{\eta}(\alpha, t) = \tilde{\eta}_0(\alpha)$ ,  $\tilde{\eta}_t(\alpha, t) = 0$  なる関係を与えれば上式は解けるはずであるが、ここでは $\eta$ に掛かる係数が $t$ の関数であるために簡単にはいかない。ただし、(4)式は1階の微分方程式なので

差分格子間隔  $\Delta t$  を十分小さくとることにより、前進差分を用いて計算しても十分精度は得られるものとする。  
 そこで時間  $(n+1)$  step の値を、1つ前の時間  $(n)$  step のものを用いて次のように表す。

$$\eta_{n+1} = \eta_n e^{-\frac{\Delta x \alpha^2}{2} \eta_n \Delta t} \cdot e^{-i\alpha((1+\frac{2}{3}\eta_n - \frac{\Delta x}{2}\eta_n) - \frac{(\alpha \Delta x)^2}{24}(1-K^2))\Delta t} \quad , \quad t=n\Delta t \quad (5)$$

以上から  $\eta$  は

$$\eta_{n+1} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\eta_n}_{\text{①数値粘性}} e^{\frac{\Delta x \alpha^2}{2} \eta_n \Delta t} \cdot e^{\underbrace{-i\alpha((1+\frac{2}{3}\eta_n - \frac{\Delta x}{2}\eta_n) - \frac{(\alpha \Delta x)^2}{24}(1-K^2))\Delta t - x}}_{\text{②有限振幅性} \quad \text{③} \quad \text{④数値分散性}} d\alpha \quad (6)$$

として求める事が出来る。線形方程式による解は、初期条件さえ与えれば、途中の波形の変化にかかわらず時間と位置だけにより決定される。しかしながら、上式の解は  $\Delta t$  前の波形に大いに依存していることが分かる。

#### 4. 数値計算結果の検討

ここでは図-1, 2に示すように、線形長波理論と浅水理論による数値計算を実施し波形を比較することにより計算結果の特性を整理する。さらに、(6)式の解を用いて説明することを試みる。図中の波高ピークの上には境界条件として与えた波高との比を示している。

まず、線形長波理論と浅水理論とを比べると2つの違いが生じる。第一に、線形長波理論の波高は伝播に伴い数値分散効果による波高減衰の現象が見られるのに対し、浅水理論の波高は逆に増加する。この波高増加は格子間隔が小さい程顕著に見られる。原因は(6)式中の②、④にある有限振幅性と数値的な分散性に関係する。即ち、前傾化により波高ピークの波形曲率が増大することに伴い、分散性の働きによりピークのすぐ後方に高波数の波(図-2中の矢印)を形成(分裂)し始める。この波の増幅がピークを高くする。ただし、格子間隔を大きくすると分裂する位置が主峰後方に変化し、逆に波高を低下させる場合もある。次ぎに、浅水理論は主峰後方に生じる高波数成分の振幅を小さくさせる傾向を持つ。数値粘性効果は(6)式中の①に示され、高波数である波ほど大きく作用する性質を持つ。従って、数値分散性により生じた高波数成分の振幅を特に小さく抑えるのである。

次ぎに、浅水理論による結果だけに着目すると、格子間隔の違いにより2つの特徴が見られる。格子間隔を大きくするほど、波高の増幅率が低下すること、波形の前傾化が遅れることである。前者の原因としては、数値粘性の効果が格子間隔の寸法により大きくなること、同時に前傾化に伴うソリトン分裂の現象が起こり難くなることが考えられる。後者の原因は、2つの効果がある。1つは、数値分散効果により伝播に伴う高波数成分の遅れが生じ、主峰の波形が滑らかに

#### 5. おわりに

以上、浅水理論を数値計算する際に生じる現象について、擬微分方程式の解を用いて説明することが出来た。その結果、有限振幅性、数値分散性、数値粘性の関連により現象が支配されることが分かった。今後、各々の効果を定量的に評価するとともに、波高変化に大きく影響すると考えられる分裂発生位置について調べる必要がある。

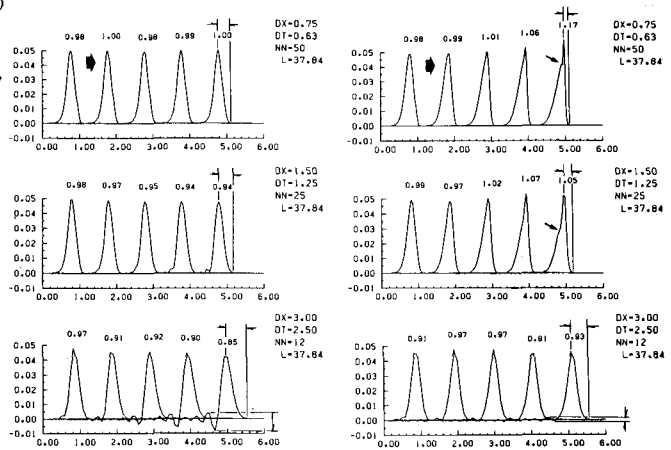


図-1線形長波理論による計算結果 図-2浅水理論による計算結果  
 (縦軸の水位は水深で無次元化され、横軸は1波長を単位としている)