GEAR'S BOXの工学的応用

東北学院大学工学部　正会員　河野 幸夫
学生員　○小山田智彦

Ⅰ．まえがき

GEAR'S BOXは，常微分方程式を解析するプログラムであるが，差分化することにより偏微分方程式についても解析することができる。そこで，このプログラムを用いて土木工学の微分方程式を解析してみる。

まず，常微分方程式と偏微分方程式を差分化し，いくつかの方程式について解析してみる。

Ⅱ．常微分方程式の差分化

1．Forward Difference

図1の $y=f(x)$ について微分すると，一階微分は(1)式のようになる。これは x の点から前の点の値を用いた微分である。これをForward Differenceという。二階，三階微分は(2)式，(3)式のようになる。

あるdomainの中で解析しようとする場合には，境界条件付近の x の点についてはこのForward Differenceの式では解くことができない。そこで次のような差分方程式が必要となる。

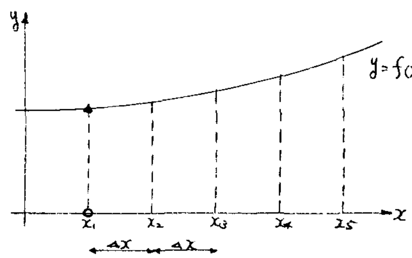

図1．Forward Difference

$$f'(x_1) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{\Delta x}$$

$$\therefore f'(x) = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \quad \text{—— (1)}$$

$$f''(x) = \frac{f(x+2\Delta x)-2f(x+\Delta x)+f(x)}{\Delta x^2} \quad \text{—— (2)}$$

$$f'''(x) = \frac{f(x+3\Delta x)-3f(x+2\Delta x)+3f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x^3} \quad \text{—— (3)}$$

2．Backward Difference

この方法は，x の点から後の点の値を用いる方法である。したがって図2より一階微分は(4)式となる。(4)式を用いて，二階微分，三階微分を行うと(5)式，(6)式になる。

3．Central Difference

この方法は，x の点の前後の値を用いて x の点について微分する方法である。したがって図3より x の一階微分は(7)式のようになる。

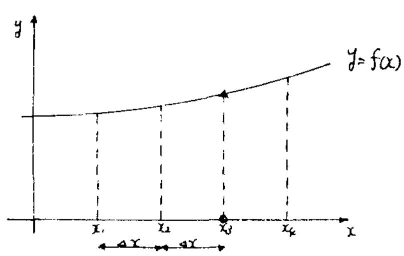

図2．Backward Difference

$$f'(x) = \frac{f(x)-f(x-\Delta x)}{\Delta x} \quad \text{—— (4)}$$

$$f''(x) = \frac{f(x)-2f(x-\Delta x)+f(x-2\Delta x)}{\Delta x^2} \quad \text{—— (5)}$$

$$f'''(x) = \frac{f(x)-3f(x-\Delta x)+3f(x-2\Delta x)-f(x-3\Delta x)}{\Delta x^3} \quad \text{—— (6)}$$

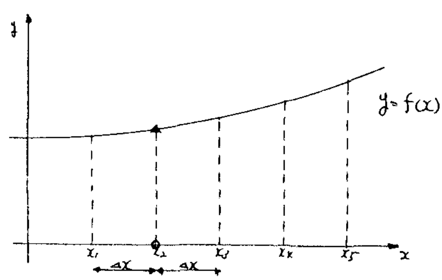

図3．Central Difference

$$f'(x) = \frac{f(x+\Delta x)-f(x-\Delta x)}{2\Delta x} \quad \text{—— (7)}$$

$$f''(x) = \frac{f(x+\Delta x)-2f(x)+f(x-\Delta x)}{\Delta x^2}$$

$$f''(x) = \frac{f(x+2\Delta x)-2f(x+\Delta x)+2f(x-\Delta x)-f(x-2\Delta x)}{2\Delta x^3}$$

III. 偏微分方程式の差分化

$U_{xx}=\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$, $U_{YY}=\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$ と定義しこれを差分化すると,

$$U_{xx}=\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}=\frac{U_{K+1}-2U_K+U_{K-1}}{h^2}=\frac{U_{(i+1)j}-2U_{ij}+U_{(i-1)j}}{h^2} \quad \text{—(8)}$$

$$U_{YY}=\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}=\frac{U_{K+1}-2U_K+U_{K-1}}{k^2}=\frac{U_{i(j+1)}-2U_{ij}+U_{i(j-1)}}{k^2} \quad \text{—(9)}$$

例えば$U_{xx}+U_{YY}=0$ という式を解くと(8),(9)式より，$h=k$ とすれば

$U_{(i+1)j}+U_{(i-1)j}+U_{i(j+1)}+U_{i(j-1)}-4U_{ij}=0$ となる。この式から分かるようにU_5の点を求めるためには，5個の点について知らなければならない。これらを各点について差分化し，連立させれば各点について求められる。

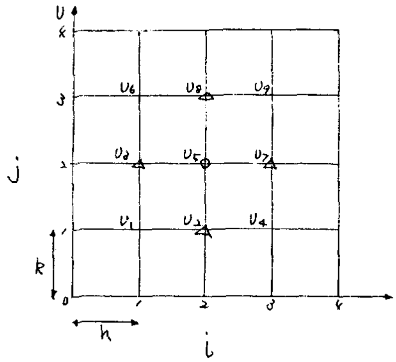

図4. 偏微分方程式の差分化

IV. GEAR'S BOX

1. Jacobian matrix

Jacobian matrix とは，(10)式のように定義されf_iの式をy_jで微分したものをいう。これを$N\times N$のJacobian matrixで表わすと次のようになる。

$$\dot{y}=f(y,t)$$

$$\frac{dy_i(t)}{dt}=f_i(y_1(t),y_2(t),\cdots,y_N(t),t)$$

$$y(t_0)=y_0$$

$$J=\frac{\partial f}{\partial y}=\left(\frac{\partial f_i}{\partial y_j}\right)_{i,j=1}^{N} \quad \text{——(10)}$$

$$J=\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1}, & \frac{\partial f_1}{\partial y_2}, & \cdots, & \frac{\partial f_1}{\partial y_j}, & \cdots, & \frac{\partial f_1}{\partial y_N} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y_1}, & \frac{\partial f_2}{\partial y_2}, & \cdots, & \frac{\partial f_2}{\partial y_j}, & \cdots, & \frac{\partial f_2}{\partial y_N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \\ \frac{\partial f_i}{\partial y_1}, & \frac{\partial f_i}{\partial y_2}, & \cdots, & \frac{\partial f_i}{\partial y_j}, & \cdots, & \frac{\partial f_i}{\partial y_N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_N}{\partial y_1}, & \frac{\partial f_N}{\partial y_2}, & \cdots, & \frac{\partial f_N}{\partial y_j}, & \cdots, & \frac{\partial f_N}{\partial y_N} \end{bmatrix}$$

V. 結果および考察

図5は，$\ddot{U}+11\dot{U}+10U=0$という常微分方程式を解いてグラフ化したものである。この式はe^{-t}を微分したものであり，e^{-t}の値と解析した値は一致しているので，GEAR'S BOXによって常微分方程式を解析できたといえる。図6は，偏微分方程式を解いたものである。このことによってGEAR'S BOXで常微分方程式，偏微分方程式を差分化することで直接の数値解析を行えることが分かった。したがって，ソリトンのKorteweg-de Vries 方程式をGEAR'S BOXを用いて解析すれば図7のような波形を得られると思われる。

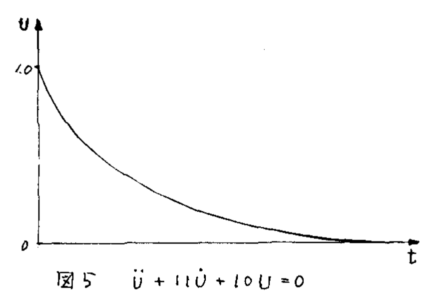

図5　$\ddot{U}+11\dot{U}+10U=0$

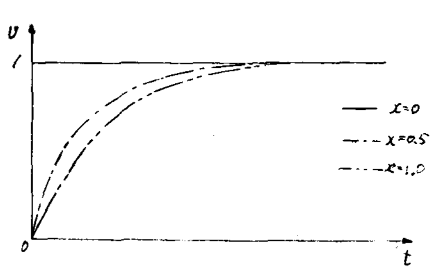

図6　$\frac{\partial U}{\partial t}=\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2$

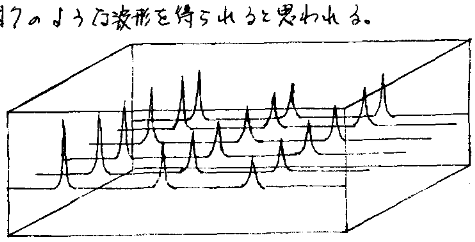

図7