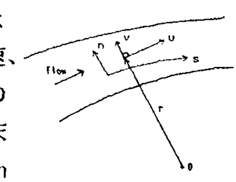
単列交互砂州上の流れの計算

秋田大学　土木工学科　○　学生員　沓沢　辰美
正　員　石井　千万太郎

1．はじめに　単列交互砂州上の流れを数値計算により求めている．基礎方程式としては、水深方向に平均化した流れを想定し、水深流路幅比が小さく流れが主に路床摩擦によって支配されるとする、定常の二次元浅水流方程式を用いた．ﾓﾃﾞﾙは路床が露出する場合をも考慮し、低水時の流れにも対応できるものとしている．

2．基礎方程式　図-1に流れの座標を示す．二次元定常乱流に対する連続の式および運動の式を(1) および(2) 、(3) 式で与える．u，vはs，n方向の水深平均流速、hは水深、rは曲率半径、ρ、wは流体の密度、単位重量、z_{*b}は基準水平面からの路床高である．摩擦項は(5) 、(6) 式で、摩擦損失係数は (7)式で与える．dは路床材料平均粒径である．また、渦動粘性係数εは (8)式で与える．ただし、κはKarman定数(=0.4)、u_* は摩擦速度である．



図－1　流れの座標

$$\frac{\partial(hu)}{\partial s}+\frac{\partial(hrv)}{r\partial n}=0 \tag{1}$$

$$u\frac{\partial u}{\partial s}+v\frac{\partial u}{\partial n}+\frac{uv}{r}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s}+\frac{\partial}{\partial s}\left(2\varepsilon\frac{\partial u}{\partial s}\right)+\frac{\partial}{\partial n}\left(\varepsilon\frac{\partial u}{\partial n}\right)-\frac{\tau_{bs}}{\rho h} \tag{2}$$

$$u\frac{\partial v}{\partial s}+v\frac{\partial v}{\partial n}-\frac{u^2}{r}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n}+\frac{\partial}{\partial s}\left(\varepsilon\frac{\partial u}{\partial n}\right)+\frac{\partial}{\partial n}\left(2\varepsilon\frac{\partial v}{\partial n}\right)-\frac{\tau_{bn}}{\rho h} \tag{3}$$

$$p/w=z_{*b}+h \tag{4}$$

$$\frac{\tau_{bs}}{\rho h}=\frac{1}{h}\left(\frac{f}{8}\right)u\sqrt{u^2+v^2} \tag{5}$$

$$\frac{\tau_{bn}}{\rho h}=\frac{1}{h}\left(\frac{f}{8}\right)v\sqrt{u^2+v^2} \tag{6}$$

$$f=a\left(\frac{h}{d}\right)^b \quad \begin{cases} a=0.22、b=-1/3\ [\text{黒木、岸、板倉の式}] & (h/d \geqq 22.3) \\ a=0.42、b=-0.54 & (h/d<22.3) \end{cases} \tag{7}$$

$$\varepsilon=\frac{\kappa}{6}u_* h \tag{8}$$

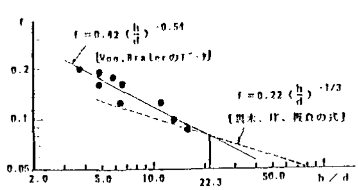
fは、計算の対象の1つとされた亀井らの実験[1]（水路勾配i_0=1/50、d=0.9mm ）に対し、黒木らの式[2]の範囲(h/d>10)を補うものとして比較的条件の類似しているWoo,Braterの実験[3]（i_0 =1/50、d=1.0mm ）のﾃﾞｰﾀを用いて、図-2の要領で求めたものである．

3．境界条件　<u>下流端</u>　p：$p=p_d$(一定),u：$u=u_d(n)$（分布を与える；固定）、v：v=0

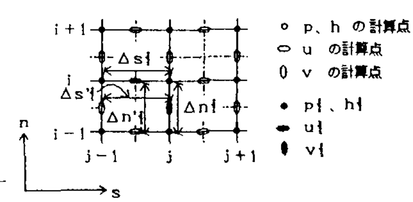
<u>上流端</u>　p：$p=\partial p/\partial n=0$（n方向に一定）

u：$u=u_u(n)$（分布を与える）、v：v=0

<u>流路側壁</u>　すべり有りおよび不透過



図－2　f－h／d

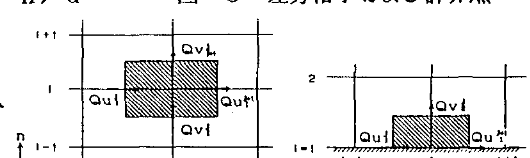


図－3　差分格子および計算点

4．方程式の差分化　差分化は、流路を格子状に細分し、図-3の各計算点に対して行っている．

<u>運動の式</u>　移流項に対してはUp-wind 、圧力項および拡散項に対しては中央差分を用いている．差分化することにより、(2) 、(3) 式はそれぞれ(9) 、(10)式の式形で表される．

<u>連続の式</u>　連続の式は表現を変えると図-4ａに示すｺﾝﾄﾛｰﾙ･ﾎﾞﾘｭｰﾑ に対して(11)式の形で表される．(11)～(13)式に(9) 、(10)式およびu_i^{j+1}、v_{i+1}^{j}に関する同様なものを代入することによりp_i^jの計算式が得られる．ただし、側壁境界においては、図-4b のようなｺﾝﾄﾛｰﾙ･ﾎﾞﾘｭｰﾑに対するものを考える．計算は、(11)式を満足するp_i^jを$p_i^{\prime j}$とするとき、$p_i^{\prime j}=p_i^j+\Delta p_i^j$として$\Delta p_i^j$を求める方法で行われる．



－a－　－b－

図－4　ｺﾝﾄﾛｰﾙ･ﾎﾞﾘｭｰﾑ

$$u_i^j=-\frac{\beta_i^j+\gamma_i^j\left(p_i^j-p_i^{j-1}\right)}{\alpha_i^j} \tag{9}$$

$$v_i^j=-\frac{\eta_i^j+\xi_i^j\left(p_i^j-p_{i-1}^j\right)}{\zeta_i^j} \tag{10}$$

$$Qu_i^j-Qu_i^{j+1}+Qv_i^j-Qv_{i+1}^j=0 \tag{11}$$

$$Qu_i^j=u_i^j\,\frac{h_i^j+h_i^{j-1}}{2}\cdot\frac{\Delta n'_{i+1}+\Delta n'_i}{2} \tag{12}$$

$$Qv_i^j=v_i^j\,\frac{h_i^j+h_{i-1}^j}{2}\cdot\frac{\Delta s'^{j+1}_i+\Delta s'^j_i}{2} \tag{13}$$

5．流量によるp，hの補正　以上の差分式による計算のほかに各断面を通過する流量が設定流量Qに等しくなるように、(14)〜(16)式によりp，hの補正を行う．Bは水面幅である。(14)式は、計算過程における流量誤差Q－Qcjが近似的にｴﾈﾙｷﾞｰ勾配に等しいとし、さらにｴﾈﾙｷﾞｰ勾配がpm の勾配に等しいとして導かれている．補正は、pmjとQcjをp_i^j、h_i^j補正後のものとして△pmj＝0の下で△pmj-1を求め、同量をp_i^jに加える方法で下流から上流へ行われた．

$$p_{mj}=\frac{1}{B_j}\int_0^{B_j} p\,dn=\frac{1}{B_j}\sum_{i=2}^{N}\frac{p_{i-1}^j+p_i^j}{2}\Delta n_i^j \quad (14)$$

$$Q_{cj}=\int_{A_j} u\,dA_j=\sum_{i=1}^{N} Qu_i^j \quad (15)$$

$$\Delta p_{mj-1}=\Delta p_{mj}+2\frac{Q-Q_{cj}}{Q_{cj}}(p_{mj-1}-p_{mj}) \quad (16)$$

6．路床露出の場合の処理　計算途中、流路床の一部が露出する地点がある場合、以下の処理を行っている．

<u>u_i^jの計算</u>　h_i^{j+1}＝0またはh_i^j＝0のとき、u_i^jの計算点水深を両水深の平均値で与え、計算上設けた最小値hmin より大きい場合につき、例えば(17)式のように内挿して与える．

$h_i^{j+1}>0$　かつ　$h_i^j=0$　の場合

$$u_i^j=\frac{\Delta s_i^j/2}{\Delta s_i^{j+1}/2+\Delta s_i^j}\cdot u_i^{j+1} \quad (17)$$

<u>v_i^jの計算</u>　h_{i-1}^j＝0またはh_i^j＝0のとき、uの場合と同様な考えで与える．ただし、i-1 〜 i間でn方向水面勾配を0として、例えば(18)式のように与える．

$h_{i-1}^j>0$　かつ　$h_i^j=0$　の場合

$$v_i^j=\begin{cases}\dfrac{\delta n_1}{(\Delta n_{i-1}^j+\Delta n_i^j)/2+\delta n_1}\cdot v_{i-1}^j & (p_{i-1}^j\leqq p_i^j)\\[2ex] \dfrac{\Delta n_i^j/2}{\Delta n_{i-1}^j/2+\Delta n_i^j}\cdot v_{i-1}^j & (p_{i-1}^j>p_i^j)\end{cases}$$

$$\delta n_1=\frac{h_{M1}}{h_{i-1}^j-h_{M1}}(\Delta n_i^j/2) \quad (18)$$

$$h_{M1}=\frac{p_{i-1}^j}{w}-\frac{z_{sb\,i-1}^j+z_{sb\,i}^j}{2}$$

<u>p_i^jの計算</u>　h_i^j＝0のとき、Δp_i^j＝0とする．ただし、n方向に関して隣接する地点の水位と比較し、例えば(19)式のように水位を復活させる．

$h_i^j=0$　かつ　$h_{i-1}^j>0$　の場合

$p_{i-1}^j>p_i^j$　であれば

$$p_i^j=p_{i-1}^j \qquad h_i^j=p_i^j/w-z_{sb\,i}^j \quad (19)$$

<u>路床露出隣接地点</u>　u_i^j、v_i^jの計算において、それぞれ(20)、(21)式で示される地点については、流れの滞流を考慮しs方向の移流項の差分をUp-wind から中央差分に変更する．

$h_i^{j+1}>0$　かつ　$h_i^j>0$　で

$h_i^{j+1}=0$　または　$h_i^{j+2}=0$　の場合　(20)

$h_{i-1}^j>0$　かつ　$h_i^j>0$　で

$h_{i+1}^{j}=0$、$h_{i+1}^{j+1}=0$、$h_i^{j-1}=0$、

$h_{i-1}^{j-1}=0$　のいずれかの場合　(21)

7．第1近似値　p、h：下流端水位p_dをもとに pm の勾配＝i_0としてpmjを設定し、p_i^j＝pmjから$h_i^j\geqq 0$、$p_i^j\geqq w z_{sb\,i}^j$となるように与える．　u：Manning 則を用い、Qcj＝Q となるように与える．v：0を与える．

$$\psi_{1\,i}^{\,j}=\psi_{0\,i}^{\,j}+\alpha(\psi_i^j-\psi_{0\,i}^{\,j}) \quad (22)$$

$$[p_{1\,i}^{\,j}:\ \psi_i^j-\psi_{0\,i}^{\,j}=\Delta p_i^j]$$

$$|(Q_{IN}-Q_{OUT})/Q_{IN}|<\delta \quad (23)$$

$$Q_{IN}=Qu_i^j+Qv_i^j \quad (24)$$

$$Q_{OUT}=Qu_i^{j+1}+Qv_{i+1}^j \quad (25)$$

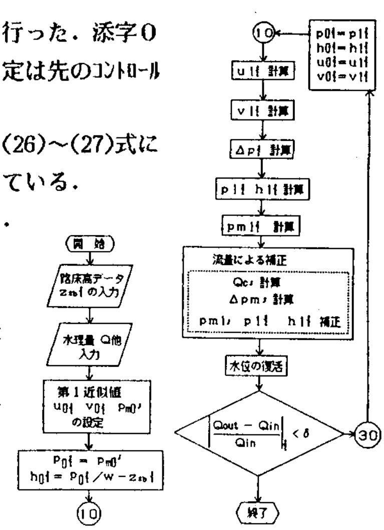
8．計算手順および収束判定　計算は図-5のﾌﾛｰﾁｬｰﾄ に従って行われた。各計算は逐次計算によったが、値の更新は計算の安定のため0.3 〜0.6 程度のﾊﾟﾗﾒｰﾀｰ αを導入して(22)式の形で行った．添字0、1は前のｽﾃｯﾌﾟ の値、更新値を示し、ψ_i^jは計算値を表す．収束判定は先のｺﾝﾄﾛｰﾙ・ﾎﾞﾘｭｰﾑに対し(23)式で行われる．δは0.01程度とした．

$$u_s=\gamma_s u,\ v_s=\gamma_s v,\ \gamma_s=1+1/\kappa\phi \quad (26)$$

$$u_b=\gamma_b u,\ v_b=\gamma_b v,\ \gamma_b=1-2/\kappa\phi \quad (27)$$

9．計算例　結果の検討のための水面および路床面流速の算定式を(26)〜(27)式に示した．φは流速係数である．同式では流速の放物線分布が仮定されている．

尚、紙面の都合上、計算例については講演時に発表するものとする．



図－5　計算のflow−chart

＜参考文献＞

1)　亀井義典、田中一也、石井千万太郎；単列交互砂州河道における中小洪水時の河岸侵食機構に関する実験的研究、東北支部技術研究発表会講演概要、昭和61年度

2)　黒木幹男、岸力、板倉忠興；交互砂州上の水理特性、文部省科研費(A)、沖積河川における河床形態と流体抵抗の研究、1975

3)　D.C.Woo 、E.F.Brater；Laminar Flow in Rough Rectanguler Channels、Journal of Geophysical Research 、p.4207〜4217