

東北大学大学院 学生員 ○ 矢沢 成尚
 東北大学工学部 正 員 真野 明
 東北大学工学部 正 員 沢本 正樹

1. はじめに

現在、有限要素法による数値計算は盛んに行われ、波浪や海浜流などいろいろな問題に適用されているが、計算を行うにあたり、解析領域をどのように分割するかということは計算時間や誤差などに大きく影響してくる。ここでは、氾濫水の流動の基礎的現象として、一様な水路を流れる不等流と角を曲がる流れについて、有限要素法を用いて計算を行い、誤差や収束性について検討を行った。

2. 基礎方程式

基礎方程式は、浅水方程式を用いる。流れは定常で水表面での摩擦は無視し、無次元化を行うと、次式のようになる。

$$\frac{\partial}{\partial X_1} \left[\frac{q_1^2}{H} \right] + \frac{\partial}{\partial X_2} \left[\frac{q_1 q_2}{H} \right] + \lambda \frac{(q_1^2 + q_2^2)}{C^2 H^2} q_1 + H \frac{\partial(H-h)}{\partial X_1^2} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial X_1} \left[\frac{q_1 q_2}{H} \right] + \frac{\partial}{\partial X_2} \left[\frac{q_2^2}{H} \right] + \lambda \frac{(q_1^2 + q_2^2)}{C^2 H^2} q_2 + H \frac{\partial(H-h)}{\partial X_2^2} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial q_1}{\partial X_1} + \frac{\partial q_2}{\partial X_2} = 0 \quad (3)$$

ここに、 $H=\zeta+h$ 、 $\lambda=L_0/H_0$ 、 q_1 ： X_1 方向の単位幅流量、 q_2 ： X_2 方向の単位幅流量、 ζ ：水表面の静水面からの距離、 h ：静水面から鉛直下方にとった距離、 C ：Chezyの係数、 L_0 ：代表的な水平方向の長さ、 H_0 ：代表的な鉛直方向の長さ

境界条件としては、流量と水深を次式のように与える。

$$\begin{aligned} q_n &= \bar{q}_n & \text{on } S_1 \\ q_2 &= 0 & \text{on } S_2 \\ H &= \bar{H} & \text{on } S_3 \end{aligned} \quad (4)$$

ここで、 $\bar{\quad}$ は境界上の既知量を表し、 q_n は境界上における法線方向の単位幅流量である。

3. 基礎方程式の有限要素法定式化

式(1)と式(2)を次のように線形化する。

$$\frac{2q_1}{H} \frac{\partial q_1}{\partial X_1} - \frac{q_1^2}{H^2} \frac{\partial H}{\partial X_2} + \frac{q_1}{H} \frac{\partial q_2}{\partial X_2} + \frac{q_2}{H} \frac{\partial q_1}{\partial X_2} - \frac{q_1 q_2}{H^2} \frac{\partial H}{\partial X_2} + \lambda \frac{(q_1^2 + q_2^2)}{C^2 H^2} q_1 + H \frac{\partial(H-h)}{\partial X_1^2} = 0 \quad (5)$$

$$\frac{q_1}{H} \frac{\partial q_2}{\partial X_1} + \frac{q_2}{H} \frac{\partial q_1}{\partial X_1} - \frac{q_1 q_2}{H^2} \frac{\partial H}{\partial X_2} + \frac{2q_2}{H} \frac{\partial q_2}{\partial X_2} - \frac{q_2^2}{H^2} \frac{\partial H}{\partial X_2} + \lambda \frac{(q_1^2 + q_2^2)}{C^2 H^2} q_2 + H \frac{\partial(H-h)}{\partial X_2^2} = 0 \quad (6)$$

式(5)、式(6)、式(3)をGalerkin法によって有限要素法定式化する。補間関数は各節点間で線形に変化する形状関数を用い、

$$q_1 = \phi_i q_{1i}, q_2 = \phi_j q_{2j}, H = \phi_l H_l, \delta q_1 = \phi_i \delta q_{1i}, \delta q_2 = \phi_j \delta q_{2j}, \delta H = \phi_l \delta H_l$$

とし、各式の両辺に、重み関数を乗じて解析領域A上で積分を行い、 $\delta q_1, \delta q_2, \delta H$ を消去すると、次式のような有限要素方程式が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{2\bar{q}_1}{\bar{H}} \Phi_{ij}^1 q_{1j} - \frac{\bar{q}_2^2}{\bar{H}^2} \Phi_{ij}^1 H_j + \frac{\bar{q}_1}{\bar{H}} \Phi_{ij}^1 q_{2j} + \frac{\bar{q}_2}{\bar{H}} \Phi_{ij}^2 q_{2j} - \frac{\bar{q}_1 \bar{q}_2}{\bar{H}^2} \Phi_{ij}^2 H_j \\ + \lambda \frac{(\bar{q}_1^2 + \bar{q}_2^2)}{C^2 \bar{H}^2} \bar{q}_1 + \bar{H} \Phi_{ij}^1 H_j - \bar{H} \frac{\partial h}{\partial X_1} \Phi_i^5 = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\bar{q}_1}{\bar{H}} \Phi_{ij}^1 q_{2j} + \frac{\bar{q}_2}{\bar{H}} \Phi_{ij}^1 q_{2j} - \frac{\bar{q}_1 \bar{q}_2}{\bar{H}^2} \Phi_{ij}^1 H_j + \frac{2\bar{q}_2}{\bar{H}} \Phi_{ij}^2 q_{1j} - \frac{\bar{q}_2^2}{\bar{H}^2} \Phi_{ij}^2 H_j \\ & + \lambda \frac{(\bar{q}_1^2 + \bar{q}_2^2)}{C^2 \bar{H}^2} q_2 + \bar{H} \Phi_{ij}^2 H_j - \bar{H} \frac{\partial h}{\partial x_2} \Phi_i^5 = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

$$\Phi_{ij}^3 q_{1j} + \Phi_{ij}^4 q_{2j} = \int_S q_n \delta H dS \quad (9)$$

$$\Phi_{ij}^1 = \iint \phi \phi_{,1} dA \quad \Phi_{ij}^2 = \iint \phi \phi_{,2} dA \quad \Phi_{ij}^3 = \iint \phi_{,1} \phi dA \quad \Phi_{ij}^4 = \iint \phi_{,2} \phi dA$$

ここで、 $\bar{q}_1, \bar{q}_2, \bar{H}$ は各要素における平均値で、各節点の初期値から決まる値である。

各要素について、式(7),(8),(9)を作成し、解析領域全体で重ね合わせて計算を行うことにより、各節点での流量と水深が得られる。計算は各節点の初期値から、 $\bar{q}_1, \bar{q}_2, \bar{H}$ を与えることによって、 q_1, q_2, H を求め、繰り返し計算を行う。

3. 計算結果

まず、一様な水路を流れる一次元的な不等流を、一次元の式と二次元の式で、図-1のような領域で計算した。一次元の有限要素方程式は、支配方程式から q_2 を含む項を消去した式を定式化したものである。流れの水面形はM2曲線で表され、Bresseの式から理論値を求め、計算値と比較した。図-2は、水深を比較した図で、一次元の計算値は少し誤差があるが、二次元の計算値は理論値とかなりよく一致している。また、繰り返し計算の計算値が収束するまでの回数を比較すると、一次元の場合の方が二次元の場合より計算回数が少ない。一次元の式と二次元の式では補間関数の形が違ってくるので、それが影響していると考えられる。

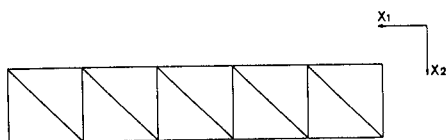


図-1 不等流の要素分割

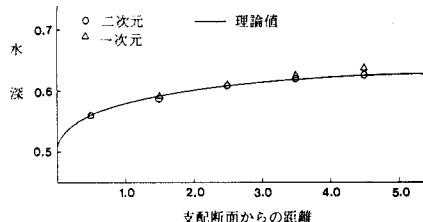


図-2 水深の理論値と計算値（無次元）

また、限界水深付近の水深の変化が大きいく所計算した場合は、上流側の水深の変化が小さいところ計算した場合より計算回数が多くなっている。これは、各節点での初期値をすべて下流側の境界条件と同じ値にしたので、上流端の節点では理論値と初期値の偏差が大きくなり、収束するまでの計算回数が多くなったと考えられる。

次に、図-3のような角を曲がる流れを計算した。この図は各要素の流量を表して、上流と下流の流量は同じになっているが、角を曲がるところの流量が少なくなっている。 q_1 は、節点2では値を持たないが、節点4ではある値を持ち、補間関数に線形関数を用いているので、節点2から4まで0から線形に変化していく流量の分布が存在することになる。同様に、節点4と節点5の間にも流量の分布が存在するので、これらのことが、角の付近の要素の流量に影響していると考えられる。これには、角の付近の要素の分割数を増す必要がある。

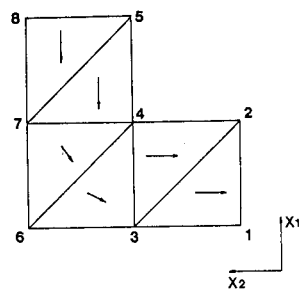


図-3 角を曲がる流れの要素分割と流量の計算値

4. 結論

計算の繰り返し回数は初期値によってことなるので、初期値の与え方によっては計算時間を短縮することができる。また、要素の分割数は、少ない方が計算時間を短くできるが、角を曲がるような流れでは、角の付近に誤差が生じることがある。