壁面抵抗と合成抵抗係数に関する一考察

日本大学工学部　正員　安　田　禎　輔

まえがき　平均流速や流速分布を調べることは，見方を変えれば，流れの抵抗則を調べることになる．流れの抵抗則に関する式には，数多くの実験式や若干の理論式がある．Prandtl & Karman の式やColebrook-Whiteの式などは，現在，最も理論的で信頼性が高い式であると云われているが，実際には，ほとんど採用されず，たとえば河川工学の分野においては，普通Manning やChezy などの経験式が採用されている．一般に，河川の流れは粗面水路における Reynolds 数の大きな乱流であるので，その抵抗係数は相対粗度のみに関係し，壁面の粗さが定まれば定数となるので，Manning の粗度係数 n やChezy の流速係数 Cは定数とみなして良いとされている．しかし実際には，単断面水路においてすら，これらの係数には相当にバラツキがあるばかりではなく，断面の形状や径深の大きさなどの影響も受ける．ましてや，異質な潤辺で構成されている複断面水路においては，なおさら単純に定数とみなしたり，断面分割法や合成粗度係数法などで流量計算を行ったりすることが困難な場合や不合理な場合が少なくない．本報においては，標記課題について，今後の研究方針を定めるための基礎的な検討事項として以上の問題点を踏まえ，本課題について考察を試みた．

1．壁面抵抗と抵抗係数

最も単純な発想ではあるが，従来は，壁面抵抗 τ_0 は単位体積当りの流体の運動エネルギー $(\rho v^2/2)$ に比例するものとみなし，その係数 f ' を壁面抵抗係数数と定義し，τ_0 を

$$\tau_0 = f'(\rho v^2/2) \quad \text{-----------}(1)$$

と示している．しかし，実際には，必ずしも τ_0 が $(\rho v^2/2)$ に比例するとはかぎらず，Nikuradse の実験結果からも明らかなように，粗面水路における Rey-nolds数の大きな乱流領域においてのみ比例関係が成立するが，それ以外の領域では成立しない．したがって，前者の領域ではChezy の平均流速式やDarcy-Weis-bach の損失水頭の式は成立するが，現在，最も幅広く利用されている Manningの式は，合理性に乏しく概略的な式と考えられる．τ_0 をΠ定理により求め，従来の形で表現すると

$$\tau_0 = f'(R_e,\ k/R,\ C_f)\rho v^2/2 \quad \text{-----}(2)$$

となり，確かに形式上 τ_0 は $(\rho v^2/2)$ に比例することになるが，係数 f ' は Reynolds 数 R_e，相対粗度 k/R または k/D や形状係数 C_f などの関数となる．したがって，f ' の実験式は領域，壁面の粗さ，断面の形状などにより数多くの式が提案され，複雑怪奇な形の式まで生まれ，従来の定義による係数 f ' には，多々不都合が生じてくる．

2．抵抗係数の新しい定義と模索

実際には必ずしも τ_0 が $(\rho v^2/2)$ に比例するとはかぎらず，むしろ τ_0 は $(\rho v^2/2)^m$ と流体の単位体積当りの運動エネルギーの次元〔$ML^{-1}T^{-2}$〕を持つある物理量の(1 - m) 乗とに比例するものと考え τ_0 を

$$\tau_0 = \lambda'(\text{ある物理量})^{1-m}(\rho v^2/2)^m \quad \text{---}(3)$$

と表現したほうが，より一般的な考え方であると思われる．ここで，ある物理量とは流体の性質や水路の幾何学的条件などを示す物理量である．

以上を満足する（ある物理量）は，(2)式を変形するだけで簡単に見つけ出すことができる．すなわち，$R_e = (2R^2/\rho\nu^2)^{1/2}(\rho v^2/2)^{1/2}$ であるからこの関係を (2)式に代入して整理すれば，(3)式のさらに具体的な式として

$$\tau_0 = \lambda'(\rho\nu^2/R^2)^{1-m}(\rho v^2/2)^m \quad \text{---}(4)$$

が得られる．ただし，$\lambda' = \lambda'(k/R\ ,C_f)$ である．(4)式はΠ定理からだけではなく，多くの研究者によって示されている実験的事実，すなわち，R_e と従来の定義による f ' とが，両対数紙上で領域に応じて直線分布することからも，簡単に求めることができる．また，筆者が以前に提案した管路の指数型の平均流速式

$$V = C_y R^{3\alpha-1} I^{\alpha} \quad \text{-----------}(5)$$

からも求めることができる．ただし，$m = 1/2\alpha$

さて，壁面が粗く充分に発達した乱流においては $m = 1.0$ となるから，(4)式は $\tau_0 = \lambda'\rho v^2/2$ となり(1) 式と完全に一致する．したがって，従来の定義による抵抗係数 f ' は，充分に発達した粗面乱流におけるものだったのである．

層流においては $\alpha = 1.0$ であるから $m = 1/2$ とな

る．$R_e = VR/\nu$ とおき，$\lambda' = 8\sqrt{2}$ とすれば，(4)式は $\tau_0 = (16/R_e)(\rho v^2/2)$ となり，在来の抵抗係数 f' は $f' = 16/R_e$ となり，従来の結果と完全に一致し，f' は R_e の関数であるのに対し λ' は定数となる．

したがって，壁面抵抗 τ_0 の一般式として (4)式を提案すれば，在来の式は矛盾なく説明がつき，層流においては $m = 0.5$，充分に発達した粗面乱流においては $m = 1.0$，滑面乱流または遷移領域においては $0.5 < m < 1.0$ となる．以上の事柄を $R_e = VR/\nu$ としてまとめると表－1となる．

3．平均流速と指数型公式

等流における壁面抵抗 τ_0 は，流れ方向の力の釣合の条件より

$$\tau_0 = \rho g R I \quad \text{-------------- (6)}$$

となる．$\alpha = 1/2m$ とおき，本式と (4)式とより平均流速を求めると

$$V = (\sqrt{2}/\nu^{2\alpha-1})(g/\lambda')^{\alpha} R^{3\alpha-1} I^{\alpha} \quad \text{--- (7)}$$

となる．ここで，$Cy = (\sqrt{2}/\nu^{2\alpha-1})(g/\lambda')^{\alpha}$, $\beta = 3\alpha - 1$，$N = 1/Cy$ とおけば，平均流速は次式で示される．

$$V = (1/N) R^{\beta} I^{\alpha} \quad \text{-------------- (8)}$$

$$\beta = 3\alpha - 1 \quad \text{-------------- (9)}$$

(8)式は一般に指数型公式と云われているが，式の形からすればベキ型公式と呼ぶべきかも知れないが，実験式のほとんど全ての式はこのタイプに属する．指数型公式のうち，指数条件 (9)式を満足する式は，Chezy,Hazen-Williams,Blasius,東京都水道局公式などであり，Manning，その他の多くの式は成立しない．

4．合成抵抗係数

粗度の異なるn個の潤辺よりなる水路の平均壁面抵抗を τ_0 とすれば，図－1より次式となる．

$$\tau_0 S = \sum \tau_i S_i \quad \text{------------ (10)}$$

$k_i = V_i/V$ とおき，上式に(4) 式を代入すれば

$$\lambda' = 1/S \sum k_i^{2m} (R/R_i)^{2(1-m)} S_i \lambda'_i \quad \text{--- (11)}$$

となる．さらに上式に λ' と f' との関係 $f' = (2/R_e^2)^{1-m} \lambda'$ を代入するか，(10)式に直接 (1)式を代入すれば

$$f' = 1/S \sum k_i^2 S_i f'_i$$

となる．本式に f' と N との関係，

$$f' = 2gN^2/(R^{2\beta-1} I^{2\alpha-1})$$

を代入して整理すれば，合成抵抗係数の一般式として次式が得られる．

$$N = \{\sum S_i (k_i N_i)^{1/\beta}/S\}^{\beta} \quad \text{-------- (12)}$$

上式にManning, Chezy, Einsteinなどの条件を代入すれば各場合の式が得られ，これらを以下に示す．

(1) Manning ($\beta = 2/3$，$N = n$)

$$n = \{\sum S_i (k_i N_i)^{1.5}/S\}^{2/3}$$

ここで，$k_i = 1$ とおくと次式となる．

$$n = \{\sum S_i n_i^{1.5}/S\}^{2/3} \quad \cdots \text{Einstein}$$

(1)' Strickler ($\beta = 1$，$k_i = 1$)

$$n = \sum S_i n_i / S$$

本式はManning の粗度係数に関する式であるがManningの条件は成立せず，目下 $\beta = 1$ となる式は提案されていない．

(2) Chezy ($\beta = 1/2$，$N = 1/C$)

$$C = \{S/\sum S_i (k_i/C_i)^2\}^{1/2}$$

(3) Hazen-Williams ($\beta = 0.63$，$N = 1/C_H$)

$$C_H = \{S/\sum S_i (k_i/C_H)^{1.59}\}^{0.63}$$

以上の各式のうち，EinsteinとStrickler の式を除けば，断面分割法と上式との計算結果は完全に一致するが，諸係数が C_f の関数となるので，現在の諸係数の値を用い合成抵抗係数を求めることはできない．

領 域	壁 面 抵 抗 の 式	備 考
層流	$\tau_0 = 8\sqrt{2}(\rho\nu^2/R^2)^{1/2}(\rho v^2/2)^{1/2}$	$\tau_0 = 16/R_e(\rho v^2/2)$
滑面乱流 遷移領域	$\tau_0 = \lambda'(\rho\nu^2/R^2)^{1-m}(\rho v^2/2)^m$	$0.5 < m < 1.0$ $m = 1/2\alpha$
粗面乱流	$\tau_0 = \lambda'(\rho v^2/2)$	$\lambda' = \lambda'(k/R, C_f)$
一 般 式	$\tau_0 = \lambda'(\rho\nu^2/R^2)^{1-m}(\rho v^2/2)^m$	$m = 0.5 \sim 1.0$ $\lambda' = \lambda'(k/R, C_f)$

表 － 1

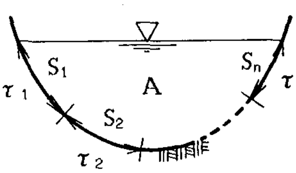

図 － 1