

岩手大学工学部 ○学生員 小笠原 集
 岩手大学工学部 正 員 宮 本 裕
 岩手大学工学部 正 員 岩崎 正二
 岩手大学工学部 正 員 出戸 秀明

1. まえがき

近年、積分方程式と有限要素法で行なわれる離散化手法を組み合わせた境界要素法と呼ばれる解析方法が工学的問題に適用されてきている。境界要素法は境界上の未知節点量だけが最終的に解くべき方程式の未知数となるため、領域型解法よりも低次元のマトリックスを取り扱うことになり、入力データ数や計算時間が大幅に短縮できるという利点がある。そこで本報告では、はりの固有振動解析に境界要素法を適用し、変断面はりの固有振動数を計算し、その結果が厳密解とよく一致していることを確かめている。

2. 解析理論

図-1に示すようなスパン l の変断面はりの動的曲げ問題の微分方程式は境界要素法では次式で与えられる。

$$E_0 I_0 \frac{d^2}{dx^2} \{ \alpha(x) \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \} - \rho \lambda^2 A(x) w(x) = 0 \quad (\lambda: \text{円振動数}) \quad (1)$$

このとき無限長はりの静的曲げ問題の基本解 $w_0(x, y)$ は次式で定義される。

$$E_0 I_0 \frac{d^4 w_0(x, y)}{dx^4} = \delta(x, y) \quad (2)$$

式(1)の両辺に等断面はりの基本解 $w_0(x, y)$ をかけ、はりのスパン l にわたって積分し、 $w(x)$ の微係数がなくなるまで部分積分を繰り返す。

$$\begin{aligned} \alpha(y) w(y) &= [Q(x) w_0(x, y) - M(x) \theta_0(x, y) \\ &+ \theta(x) \alpha(x) M_0(x, y) - w(x) \{ \frac{d\alpha(x)}{dx} M_0(x, y) + \alpha(x) \\ &\times Q_0(x, y) \}]_{x=a}^b + \int_a^b w(x) \{ \frac{d^2\alpha(x)}{dx^2} M_0(x, y) + 2 \frac{d\alpha(x)}{dx} Q_0(x, y) \} dx \\ &+ \rho \lambda^2 \int_a^b A(x) w(x) w_0(x, y) dx \end{aligned} \quad (3)$$

式(3)をさらに y で微分すると、

$$\begin{aligned} -\frac{d\alpha(y)}{dy} w(y) + \alpha(y) w(y) &= [Q(x) \bar{w}_0(x, y) - M(x) \bar{\theta}_0(x, y) \\ &+ \theta(x) \alpha(x) \bar{M}_0(x, y) - w(x) \{ \frac{d\alpha(x)}{dx} \bar{M}_0(x, y) + \alpha(x) \\ &\times \bar{Q}_0(x, y) \}]_{x=a}^b + \int_a^b w(x) \{ \frac{d^2\alpha(x)}{dx^2} \bar{M}_0(x, y) + 2 \frac{d\alpha(x)}{dx} \bar{Q}_0(x, y) \} \\ &\cdot dx + \rho \lambda^2 \int_a^b A(x) w(x) \bar{w}_0(x, y) dx \end{aligned} \quad (4)$$

式(3)と(4)にGaussの数値積分公式を用いて展開すると式(5)、(6)、(7)となる。

$$\begin{aligned} \alpha_j w_j &= A_{j,1} Q(b) + A_{j,2} M(b) + A_{j,3} \theta(b) + A_{j,4} w(b) + B_{j,1} Q(a) \\ &+ B_{j,2} M(a) + B_{j,3} \theta(a) + B_{j,4} w(a) + C_{j,1} w_1 + C_{j,2} w_2 + C_{j,3} w_3 + \dots \\ &+ C_{j,n+1} w_{n+1} + \rho \lambda^2 (D_{j,1} w_1 + D_{j,2} w_2 + D_{j,3} w_3 + \dots + D_{j,n+1} w_{n+1}) \\ &(j=1, 2, 3, \dots, n+1) \end{aligned} \quad (5)$$

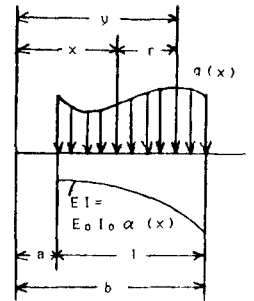


図-1

$$A_{n+2,1}Q(b) + A_{n+2,2}M(b) + A_{n+2,3}\theta(b) + A_{n+2,4}W(b) + B_{n+2,1}Q(a) + B_{n+2,2}M(a) + B_{n+2,3}\theta(a) + B_{n+2,4}W(a) + C_{n+2,1}W_1 + C_{n+2,2}W_2 + C_{n+2,3}W_3 + \cdots + C_{n+2,n+1}W_{n+1} + \rho\lambda^2(D_{n+2,1}W_1 + D_{n+2,2}W_2 + D_{n+2,3}W_3 + \cdots + D_{n+2,n+1}W_{n+1}) = 0 \quad (6)$$

$$A_{n+3,1}Q(b) + A_{n+3,2}M(b) + A_{n+3,3}\theta(b) + A_{n+3,4}W(b) + B_{n+3,1}Q(a) + B_{n+3,2}M(a) + B_{n+3,3}\theta(a) + B_{n+3,4}W(a) + C_{n+3,1}W_1 + C_{n+3,2}W_2 + C_{n+3,3}W_3 + \cdots + C_{n+3,n+1}W_{n+1} + \rho\lambda^2(D_{n+3,1}W_1 + D_{n+3,2}W_2 + D_{n+3,3}W_3 + \cdots + D_{n+3,n+1}W_{n+1}) = 0 \quad (7)$$

式(5)、(6)、(7)をマトリックス式で表わすと、式(8)のようになる。

$$\begin{Bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} W \\ Q \end{Bmatrix} + \rho\lambda^2 \begin{Bmatrix} D_{11} & 0 \\ D_{21} & 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} W \\ Q \end{Bmatrix} = 0 \quad (8)$$

ここで、 $\{W\} = \{w_1, w_2, \dots, w_{n+1}\}^T$ 、 $\{Q\} = \{Q(b), M(b), \theta(b), Q(a), M(a), \theta(a)\}^T$ である。式(8)を解くために、両辺に $(1/\rho\lambda^2)K^{-1}$ をかけ、次式で表わす。

$$\frac{1}{\rho\lambda^2} \begin{Bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} W \\ Q \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{Bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} D_{11} & 0 \\ D_{21} & 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} W \\ Q \end{Bmatrix} = 0 \quad (9)$$

式(9)について、Eberlein法を用いて固有値問題を解く。

3. 数値計算例

図-2、図-3に示すような $l = 2.0\text{ m}$ 、 $EI = 1.0\text{ t m}^2$ のはりの10分割について検討した結果が表-1、表-2である。

(a) 等断面はりの固有振動数

表-1

境界条件	厳密解(sec ⁻¹)	計算結果	誤差(%)
片持ばり	1.8751	1.91143747	1.937894
両端ヒンジ	3.1416	3.14160059	0.000250
固定ヒンジ	3.9266	3.92662666	0.000680
両端固定	4.7300	4.73010294	0.002176

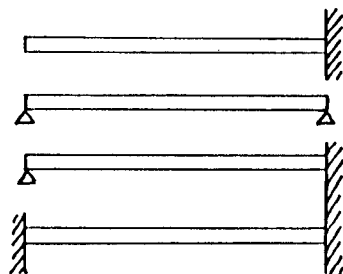


図-2

(b) 変断面はりの固有振動数

片持ばりにおいて次式の係数Cを変化させる。 I_0 はある基準点における慣性モーメント。

$$I = I_0 \left(1 - C \frac{x}{l}\right)$$

表-2

係数C	厳密解(sec ⁻¹)	計算結果	誤差(%)
0.00	1.8751	1.90765235	1.736032
0.25	1.9598	1.98321683	1.194858
0.50	2.0816	2.08677480	0.248600
0.75	2.2727	2.24349453	-1.283475
1.00	2.6758	2.53137044	-5.397625

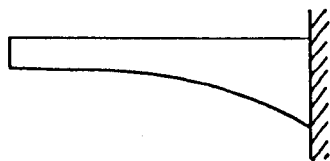


図-3

【参考文献】

- 1) チモシェンコ著、工業振動学(東京図書)
- 2) 出戸秀明・宮本裕・岩崎正二著、境界積分方程式による変断面はりの解法(岩手大学工学部研究報告 Vol. 37, 1984)