直交異方性板の有限要素法解析

岩手大学工学部　○学生員　竹原寛幸
岩手大学工学部　正　員　岩崎正二
岩手大学工学部　正　員　宮本　裕
岩手大学教育学部　辻野哲司

1．まえがき

有限要素法による解析の中心は、各要素のstiffness matrixを計算することである。これを誘導するのに、要素内の応力状態を仮定するものと、変形状態を仮定するものとの二つがあるが、変形を仮定するもののほうが一般的である。変形の状態を示す変位関数には、非適合変位関数と適合変位関数とがあるが、本論においては、適合変位関数によって解析的にstiffness matrixを誘導し、直交異方性板のたわみを解析する。

2．解析理論

異方性板におけるひずみエネルギーUは、

$$U=\frac{1}{2}\iiint\{D_x\varepsilon_x^2+(D_1+D_2)\varepsilon_x\varepsilon_y+D_y\varepsilon_y^2+D_{xy}\gamma_{xy}^2\}\,dx\,dy\,dz \qquad (1)$$

ただし $D_x=\dfrac{E_x}{1-\nu_x\nu_y}$，$D_y=\dfrac{E_y}{1-\nu_x\nu_y}$，$D_1=\dfrac{\nu_x E_y}{1-\nu_x\nu_y}$，$D_2=\dfrac{\nu_y E_x}{1-\nu_x\nu_y}$，$D_{xy}=G_{xy}$　（2）

板の曲げによる線形理論では、x，y方向の縦ひずみε_x，ε_y及びこれらの軸に関するせん断ひずみγ_{xy}は、板の中央面の伸びを無視してつぎのように表わされる。

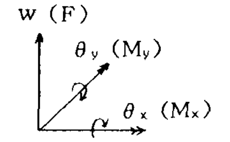
$$\varepsilon_x=-z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\ ,\quad \varepsilon_y=-z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\ ,\quad \gamma_{xy}=-2z\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} \qquad (3)$$

式（1）に式（3）を代入すると、

$$U=\frac{h^3}{24}\iint\left\{D_x\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2+2D_1\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)+D_y\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2+4D_{xy}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2\right\}dx\,dy$$

変位関数は、Greeneによって提案されたものを用いる。この関数は、要素の各辺上でたわみ及び傾斜角の適合条件を完全に満たしており、次のように与えられる。なお、ここで用いる有限要素は図－1に示すような長方形平板要素である。（$\xi=x/b$，$\eta=y/a$）

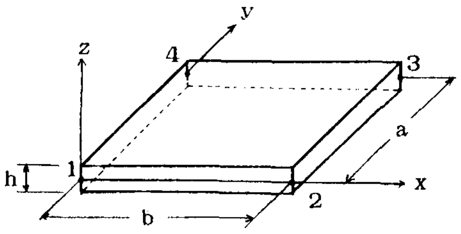
$$\begin{aligned}w=\ &\phi_1(\xi)\phi_1(\eta)w_1+\phi_1(\xi)\phi_3(\eta)a\theta_{x1}+\phi_3(\xi)\phi_1(\eta)b\theta_{y1}\\&+\phi_2(\xi)\phi_1(\eta)w_2+\phi_2(\xi)\phi_3(\eta)a\theta_{x2}+\phi_4(\xi)\phi_1(\eta)b\theta_{y2}\\&+\phi_2(\xi)\phi_2(\eta)w_3+\phi_2(\xi)\phi_4(\eta)a\theta_{x3}+\phi_4(\xi)\phi_2(\eta)b\theta_{y3}\\&+\phi_1(\xi)\phi_2(\eta)w_4+\phi_1(\xi)\phi_4(\eta)a\theta_{x4}+\phi_3(\xi)\phi_2(\eta)b\theta_{y4}\end{aligned}$$



力とそれに対応する変位

$$\phi_{1(s)}=1-3s^2+2s^3$$
$$\phi_{2(s)}=3s^2-2s^3$$
$$\phi_{3(s)}=s-2s^2+s^3$$
$$\phi_{4(s)}=-s^2+s^3$$

ここで、$K\xi=\partial^2 w/\partial\xi^2$
$K\eta=\partial^2 w/\partial\eta^2$
$K\xi\eta=\partial^2 w/(\partial\xi\partial\eta)$とおく。



図－1　長方形平板要素

以上によりUは次のようにあらわされる。

$$U=\frac{h^3}{24ab}\int_0^1\!\!\int_0^1(P^{-2}D_xK\xi^2+2D_1K\xi K\eta+P^2D_yK\eta^2+4D_{xy}K\xi\eta^2)\,d\xi\,d\eta$$

節点変位は各節点におけるたわみとx軸およびy軸まわりの傾斜角であり、これに対応して節点力は各節点におけるせん断力とx軸およびy軸まわりの曲げモーメントであって、それぞれ次のように与えられる。

$\{\delta_b\}=\{w_1,\ \theta_{x1},\ \theta_{y1},\ w_2,\ \theta_{x2},\ \theta_{y2},\ w_3,\ \theta_{x3},\ \theta_{y3},\ w_4,\ \theta_{x4},\ \theta_{y4}\}^T$

$\{f_b\}=\{F_1,\ M_{x1},\ M_{y1},\ F_2,\ M_{x2},\ M_{y2},\ F_3,\ M_{x3},\ M_{y3},\ F_4,\ M_{x4},\ M_{y4}\}^T$

$\{f_b\}=[K_{ij}]\{\delta_b\}$　　　（$i,j=1,2,\ldots,12$，^{T}は転置行列をあらわす）

一般に剛性マトリックスの要素には次の関係が成り立つ。

$$K_{ij}=\frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j}=\frac{\partial^2 U}{\partial q_j \partial q_i}$$

ここに、$\{q_1,\ q_2,\ .\ .\ .\ ,\ q_{12}\}=\{w_1,\ \theta_{x1},\ \theta_{y1},\ .\ .\ .\ ,\ \theta_{y4}\}^T$ （４）

よって、マトリックス要素K_{ij} は次のようになる。

$$K_{ij}=\frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_j}\right)=\frac{h^3}{24ab}\int_0^1\int_0^1\left\{P^{-2}D_x\frac{\partial K\xi}{\partial q_i}\cdot\frac{\partial K\eta}{\partial q_j}+D_1\left(\frac{\partial K\xi}{\partial q_i}\cdot\frac{\partial K\eta}{\partial q_j}+\frac{\partial K\xi}{\partial q_j}\cdot\frac{\partial K\eta}{\partial q_i}\right)\right.$$
$$\left.+P^2D_y\frac{\partial K\xi}{\partial q_i}\cdot\frac{\partial K\eta}{\partial q_j}+4D_{xy}K\xi\eta\ \frac{\partial K\xi\eta}{\partial q_i}\cdot\frac{\partial K\xi\eta}{\partial q_j}\right\}d\xi d\eta \qquad (5)$$

式（５）と式（４）を対応させて剛性マトリックス［K_{ij}］を求める。

例）$i=j=1$のとき

$$K_{11}=\frac{h^3}{12ab}\left(\frac{156}{35}P^{-2}D_x+\frac{72}{25}D_1+\frac{156}{25}P^2D_y+\frac{144}{25}D_{xy}\right)$$

$i=7,\ j=6$のとき

$$K_{76}=\frac{h^3}{12ab}b\left(-\frac{27}{35}P^{-2}D_x+\frac{36}{25}D_1+\frac{22}{25}P^2D_y+\frac{12}{25}D_{xy}\right)$$

３．計算例

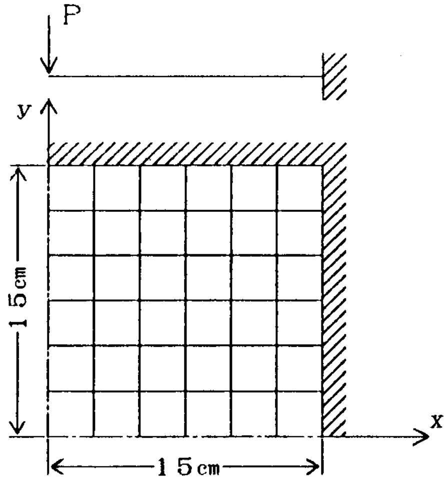
図−２は中央集中荷重をうける周辺固定等方性板の１／４モデルである。表−１は各境界条件におけるたわみの計算結果（図−２と同様、３６要素）である。表−２は要素数とたわみの関係を比較したものである。計算においては、数値積分によって剛性マトリックスをもとめ非線形部分も計算することができるプログラムを上記の剛性マトリックス部分を書き替えたプログラムを用いた。異方性板の計算は非線形の計算である。

表−１　（30cm×30cm×0.5cm　E=2100000kg/cm²　ν=0.3　G=807920kg/cm²　＜ ＞内は厳密解との誤差）

境界条件	等分布荷重（q=0.08kg/cm²）	中央集中荷重（P=4kg）
二辺単純支持二辺自由	3.54026 E-2 cm ＜ 0.30%＞	3.48461 E-3 cm
周辺単純支持	1.03224 E-2 〃 ＜ 5.68〃＞	1.65772 E-3 〃 ＜ 4.58%＞
二辺固定二辺自由	4.98916 E-3 〃 ＜ 3.60〃＞	1.02015 E-3 〃
周辺固定	3.32306 E-3 〃 ＜ 2.16〃＞	8.14785 E-4 〃 ＜ 2.84%＞

表−２　周辺固定中央集中荷重等方性板（P=4kg：厳密解=8.38656E-4cm）

要素数	たわみ(cm)	誤差(%)
4	7.85728 E-4	6.31
9	8.00750 〃	4.52
16	8.08201 〃	3.63
25	8.12294 〃	3.14
36	8.14785 〃	2.85
64	8.18381 〃	2.42
100	8.25946 〃	1.52



図−２

異方性板（102.5cm×102.5cm×7.942cm,
E_x=656.20kg/cm², E_y=606.13kg/cm²,
ν_x=0.1891, ν_y=0.1747, G_{xy}=52.32kg/cm²）

二辺単純支持二辺自由：w=7.77623cm

周辺単純支持　　　　：w=6.23263cm

【参考文献】

川井忠彦・吉村信敏：有限要素法による平板の大たわみ問題の解析／生産研究20巻8号(1968.8)

J.S.シェムニスキー著　川井忠彦・山田嘉昭共訳：マトリックス構造解析の基礎理論／培風館