限界状態式の不確実性の取扱いに関する研究

東北大学大学院　学生員　○小出　英夫
東北大学工学部　正　員　　尾坂　芳夫

1．目的

限界状態設計法では，限界状態式（一般に耐力算定式と作用力算定式より構成される）によって導かれる値の正負により構造物の安全性が照査される．しかし，限界状態式自体が未知の“真の限界状態式”をモデル化した不確実なものであるため，限界状態式の式中でこの不確実性を考慮する必要がある．そこで本研究では，耐力算定式の不確実性について，限界状態式中でどのように取り扱えば良いかを示し，さらにその結果必要とされる耐力算定式の不確実性を考慮するための係数の合理的推定法を明らかにした．

2．耐力算定式の不確実性の取扱い法

耐力算定式の不確実性は，耐力決定に影響するはずのパラメータがたぶん欠落していたり，式中の各引数の関係が異なることによって生じるものである．そこで，ある設計の基で造られた構造物の時刻T（施工完成時をt_0）におけるある限界状態・載荷状態に対する”真の耐力”は以下のような引数の基で，未知の関数gを用いて確定されるはずである．

$$R_r = g\,(X_A,\ X_B,\ U\,;\ T) \tag{1}$$

$$X_A = \{X_{Ai}\}\quad i=1,n,\quad X_B=\{X_{Bi}\}\quad i=1,j_{xB},\quad U=\{U_i\}\quad i=1,j_u$$

ここで，R_rは“真の耐力”の確率量，　X_Aは耐力算定式に用いられる各設計変数の時刻Tによって特定される確率量の集合，　X_Bは耐力算定式には用いられない既知の変数の時刻Tによって特定される確率量の集合，　Uは“真の耐力”の値の特定に関係すると思われる複数個の”未知の変数”の，時刻Tによって特定される確率量の集合；Uの要素には，X_A，X_Bと独立でない”未知の変数”の確率量が含まれることも予想される．　iは要素を特定するための助変数，n，j_{xB}，j_uは各集合の要素数を示す．なお，小文字はそれぞれの確率量からの実現値を表すものとし，X_A，X_Bは時刻Tによってその実現値に変動がなく，$\overline{x_A}$，$\overline{x_B}$はX_A，X_Bの平均値に一致して良いとし，設計時に指定した値となるようにする．

ここで，任意のT＝t，の条件の元での”真の耐力”の確率量$R_{r|T=t}$は以下の様に表される．

$$R_{r|T=t} = g\,(X_A,\ X_B,\ U\,;\ t) \tag{2a}$$

ここで，一般に用いられている耐力算定式をg_pとして表し，新たな未知の確率量Φ_1を導入し次式で示すように$R_{r|T=t}$と関数g_pを関係付ける．ここでΦ_1は，未知の関数g_1を用いて確定できるはずである．

$$\Phi_1 = g\,(X_A,\ X_B,\ U\,;\ t)\,/\,g_p\,(\overline{x_A}) = g_1\,(\overline{x_A},\ \overline{x_B},\ U\,;\ t) \tag{3}$$

式（2a）は，式（3）より以下のように書き換えることができる．

$$R_{r|T=t} = g_1\,(\overline{x_A},\ \overline{x_B},\ U\,;\ t)\cdot g_p\,(\overline{x_A}) = \Phi_1\cdot g_p\,(\overline{x_A}) \tag{2b}$$

式（2b）より，ある$\overline{x_A}$，$\overline{x_B}$における$R_{r|T=t}$の分布が既知であれば，未知のΦ_1の分布を求めることができ，その結果，限界状態式にこのΦ_1を導入することにより耐力算定式の不確実性を考慮した安全性照査を行うことができる．しかし，一般に$R_{r|T=t}$の分布を知ることは不可能であり，また一般的に行われている設計に対して各設計変数の不確実性を考慮した確率論的な安全性照査を行う場合，一般的に議論される限界状態到達確率のオーダーにおいては，Φ_1を確率変数のまま取扱うことは結果的にあまり意味がなくなることが予想され，ここではΦ_1の平均値が我々の知りたい情報と考えられる．よって，式（2b）より導かれた次式で示されるΦ_1の平均値を用いて限界状態式内で耐力算定式の不確実性を取扱うものとする．

$$E\,[R_{r|T=t}] = E\,[\,g_1\,(\overline{x_A},\ \overline{x_B},\ U\,;\ t)\,]\cdot g_p(\overline{x_A}) \tag{4}$$

3．E［Φ_1］の推定法

式（4）より，任意の$\overline{x_A}$，$\overline{x_B}$，tにおける未知のE［$g_1(\overline{x_A},\overline{x_B},U;t)$］を求めるにはE［$R_{r|T=t}$］

の値を知る必要がある（なお，以下では耐力値の時間的変動が無視できると予想される，あるもの範囲に対しの議論に特定し，よって変数Tを消去する）．しかし，特定の$\overline{x_A}$，$\overline{x_B}$における数多くの構造物の耐力データーをそろえE［R_r］を算定することは不経済であり，また，いくつかの（$\overline{x_A}$，$\overline{x_B}$）点でのE［Φ_1］が求められても，それらの結果より他の（$\overline{x_A}$，$\overline{x_B}$）点におけるE［$g_1(\overline{x_A}, \overline{x_B}, U)$］を類推することは困難である．

そこで，以下の方法で任意の$\overline{x_A}$，$\overline{x_B}$におけるE［$g_1(\overline{x_A}, \overline{x_B}, U)$］を推定する．

耐力の測定誤差を表す他の確率量と独立な確率量Φ_2を用いて耐力の観測値の確率量R_oを次式で定義する．

$$R_o = \Phi_2 \cdot R_r \tag{5}$$

式（5）でR_oの平均値E［R_o］に着目すると，Φ_2の平均値E［Φ_2］を用いて次式に書き換えられる．

$$E[R_o] = E[\Phi_2] \cdot E[R_r] \tag{6}$$

ここで，複数の設計を考えそれぞれの確定値$\overline{x_A}$，$\overline{x_B}$をそれぞれ変数Y_A，Y_Bからの実現値と考える．そしてE［R_o］は，ある（y_A，y_B）ごとその近傍でのみY_A，Y_Bを引数とするある連続関数$g_{o:yA,yB}$によって与えられるものと仮定する．よって，（$Y_A = x_A^*$，$Y_B = x_B^*$）近傍の（y_A，y_B）において式（4）より次式が成立するとする．

$$g_{o|xA^*,xB^*}(y_A, y_B) = E[\Phi_2] \cdot E[g_1(y_A, y_B, U)] \cdot g_p(y_A) \tag{7a}$$

式（7a）よりE［$g_1(y_A, y_B, U)$］もy_A，y_Bを引数とするある連続関数$g_{u|xA^*,xB^*}$で与えられる．

$$g_{o|xA^*,xB^*}(y_A, y_B) = E[\Phi_2] \cdot g_{u|xA^*,xB^*}(y_A, y_B) \cdot g_p(y_A) \tag{7b}$$

式（7b）は任意の（x_A^*，x_B^*）近傍の（y_A，y_B）に対して成立する．

一方，実験結果より（$y_A = x_A^*$，$y_B = x_B^*$）近傍の耐力測定値のデータを集める．これらのデータを用いて以下の仮定に基づき，重線形回帰より（x_A^*，x_B^*）近傍でのみ成立する式（8）を導く．

◎（x_A^*，x_B^*）近傍の，各値に対するR_oの平均値は，y_A，y_Bの一次関数である．

◎（x_A^*，x_B^*）近傍の，各値に対する条件つき分散は，一定値とする．

$$g_{o|xA^*,xB^*}(y_A, y_B) = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot y_{A1} + \cdots + \alpha_n \cdot y_{An} + \alpha_{n+1} \cdot y_{B1} + \cdots + \alpha_{n+jxB} \cdot y_{BjxB} \tag{8}$$

ここで，α_iはそれぞれx_A^*，x_B^*によって特定される重線形回帰より求められる係数値である．

よって，式（7b），（8）よりx_A^*，x_B^*におけるE［$g_1(x_A^*, x_B^*, U)$］は次式より推定できる．

$$\begin{aligned} E[g_1(x_A^*, x_B^*, U)] &= g_{u|xA^*,xB^*}(x_A^*, x_B^*) = \frac{g_{o|xA^*,xB^*}(x_A^*, x_B^*)}{E[\Phi_2] \cdot g_p(x_A^*)} \\ &= \frac{\alpha_0 + \alpha_1 \cdot x_{A1}^* + \cdots + \alpha_n \cdot x_{An}^* + \alpha_{n+1} \cdot x_{B1}^* + \cdots + \alpha_{n+jxB} \cdot x_{BjxB}^*}{E[\Phi_2] \cdot g_p(x_A^*)} \end{aligned} \tag{9}$$

さらに，$g_{u|xA^*,xB^*}(y_A, y_B)$を（$x_A^*$，$x_B^*$）点で式（10）のようにテーラー展開することにより，E［$g_1(x_A^*, x_B^*, U)$］に対する各設計変数の感度が推定でき，他の任意の（y_A，y_B）＝（$\overline{x_A}$，$\overline{x_B}$）におけるE［$g_1(y_A, y_B, U)$］＝E［$g_1(\overline{x_A}, \overline{x_B}, U)$］を推定する場合の基礎データとして用いることができる．

$$\begin{aligned} g_{u|\overline{xA},\overline{xB}}(y_A, y_B) \fallingdotseq\ & g_{u|\overline{xA},\overline{xB}}(\overline{x_A}, \overline{x_B}) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g_{u|\overline{xA},\overline{xB}}}{\partial Y_{Ai}} \Big|_{Y=\overline{x}} \cdot (y_{Ai} - \overline{x_{Ai}}) \\ & + \sum_{i=1}^{jxB} \frac{\partial g_{u|\overline{xA},\overline{xB}}}{\partial Y_{Bi}} \Big|_{Y=\overline{x}} \cdot (y_{Bi} - \overline{x_{Bi}}) \end{aligned} \tag{10}$$

4. まとめ

耐力算定式の不確実性を考慮するためにある係数を導入するという概念は，従来（計算値／実験値）の統計的データより導き出すという手法が一般的であったが，これには特定の設計値に対しての多くのデータが必要とされ，実際には不可能であった．しかし，本研究で提案した方法によって，実験データを有効に用いて耐力算定式の不確実性を考慮するための係数を推定することが可能になったといえる．