

① 結 言 本報告においては、混合型の Hu-Washizu の変分原理¹⁾に、平板理論定式化の目的に合わせた変形を加えることにより、Reissner の新しい混合型の変分原理^{2),3)}に動的な項を付加して拡張したものに相当する原理式を得、これを用いて均質等厚板の動的解析理論を、各種成分の板厚方向分布の次数に制限を設けない一般化高次理論として定式化し、数値例を提示して本理論の解析精度特性について検討する。

② 理論の定式化 Fig.1 に示す平板に関する動的な支配方程式ならびに境界条件式を得るため、次式のような変分原理を用いる。

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \{ T_M - \Pi_M \} dt = 0 \quad (1)$$

上式中の T_M は運動エネルギーであり次式で与えられる。

$$T_M = \int_V \left\{ \frac{1}{2} \rho \dot{U}_i \dot{U}_i - \dot{p}_i (\dot{U}_i - \dot{U}_i) \right\} dV \quad (2)$$

ここに、 $\dot{U}_i$: 速度成分、 U_i : 変位成分、 ρ : 質量密度、 $\dot{p}_i$: Lagrange の未定定数、 $(\dot{}) \equiv \partial()/\partial t$ であり、添字 = x, y, z (総和規約を適用する)。

また Π_M は次式のような汎関数である。

$$\begin{aligned} \Pi_M = \int_V \{ & U(\epsilon_{ij}) - \bar{f}_i U_i - \sigma_{\alpha\beta} [2\epsilon_{\alpha\beta} - (U_{\alpha,\beta} + U_{\beta,\alpha})] \\ & - \sigma_{zz} (\epsilon_{zz} - U_{z,z}) \} dV \\ & - \int_{S_\sigma} \bar{T}_i U_i dS - \int_{S_u} \bar{r}_i (U_i - \bar{U}_i) dS \end{aligned} \quad (3)$$

ここに、 U : 歪エネルギー、 ϵ_{ij} : 歪テンソル、 $\bar{f}$: 物体力であり、 S_σ : 応力境界、 S_u : 変位境界、また σ_{iz} , $\bar{r}_i$: Lagrange の未定定数である、なおギリシヤ添字 = x, y, (), $_{,i} \equiv \partial()/\partial x_i$ とする。

式 (1) の変分原理とともに、面内歪の幾何学的関係式と面内応力ならびに面外歪の構成関係式を付帯条件として用いる。

式 (1) の変分の結果は次式のように整理できる。

$$\begin{aligned} \delta \int_{t_1}^{t_2} \int_V \{ & \delta U_\alpha (\sigma_{\alpha\beta,\beta} + \sigma_{\alpha z,z} - \rho \ddot{U}_\alpha) \\ & + \delta U_z (\sigma_{zz,\alpha} + \sigma_{zz,z} - \rho \ddot{U}_z) \\ & + \delta \sigma_{\alpha\beta} [2\epsilon_{\alpha\beta} - (U_{\alpha,\beta} + U_{\beta,\alpha})] \\ & + \delta \sigma_{zz} (\epsilon_{zz} - U_{z,z}) \} dV \\ & - \int_{S_\sigma} \delta U_i (n_j \sigma_{ij} - \bar{T}_i) dS \\ & + \int_{S_u} n_j \delta \sigma_{ij} (U_i - \bar{U}_i) dS \} dt = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

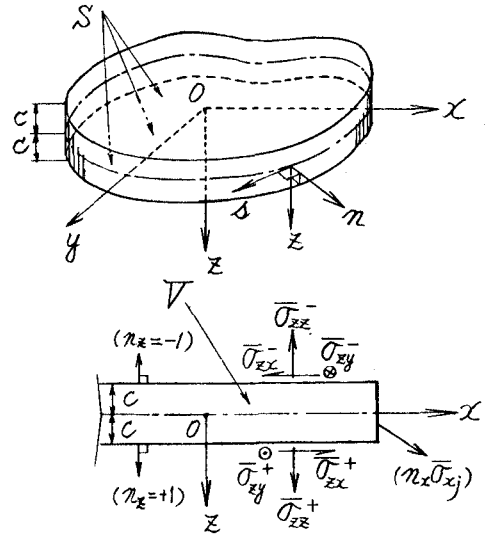


Fig.1 Geometry of plate and surface tractions.

Table 1 Eigenvalue Ω for simply-supported rectangular plate.

$$\Omega (= 2c\omega/\sqrt{G/\rho}) \quad (c = 0.96)$$

Mode	A_1		A_2		A_3	
	S.B.C. OK	S.B.C. NO	S.B.C. OK	S.B.C. NO	S.B.C. OK	S.B.C. NO
1st	3.7114 (-0.02)	4.0018 (+0.98)	5.4534 (+0.22)	5.6238 (+3.56)	8.8292 (+0.39)	9.2050 (+24.47)
2nd	3.7581 (+0.03)	3.7558 (+0.90)	5.4414 (-1.0)	5.4419 (+0.01)	7.6687 (+3.69)	7.7228 (+5.10)
3rd	3.7420 (-1.0)	3.7420 (-1.0)	5.4414 (-1.0)	5.4414 (-1.0)	7.4705 (+0.07)	7.4705 (+0.11)
Exact	3.7420		5.4414		7.3956	

Mode	S_1		S_2	
	S.B.C. OK	S.B.C. NO	S.B.C. OK	S.B.C. NO
1st	4.4288 (-1.0)	4.4288 (-1.0)	5.8976 (+71.06)	6.4896 (+24.65)
2nd	(-)	(-)	5.2014 (-1.0)	5.2015 (-1.0)
3rd	(-)	(-)	5.2013 (-1.0)	5.2013 (-1.0)
Exact	4.4288		5.2013	

$$V = 0.3$$

$$\theta = \left(\frac{2mc}{a} \right)^2 + \left(\frac{2nc}{b} \right)^2 = 2.0$$

式(4)の体積積分中の U_i に関する停留条件から、運動方程式が得られ、 $\sigma_{i,z}$ の停留条件から面外歪の幾学的関係式が得られる。また S_0 上での U_i ならびに S_u 上での τ_{ij} の停留条件より境界条件式が得られることになる。

次に、式(4)に基づいて平板理論を構築するために、変位と面外応力の各成分を、以下に示すように基準化した板厚座標 ξ ($\xi = z/c$)に関する無限多項式で展開する。まず、変位を面内変位と面外変位に分け、それぞれ次式で仮定する。

$$\left. \begin{aligned} U_\alpha &= \sum_{m=0}^{\infty} U_{\alpha(m)} P_m(\xi) \\ U_z &= U_{z0} + \sum_{m=0}^{\infty} U_{z(m)} R_m(\xi) \end{aligned} \right\} \text{-----}(5)$$

ここに、 $P_m(\xi)$ はLegendre多項式、 $R_m(\xi)$ はその一回積分型の多項式である。次に面外応力成分をこの $R_m(\xi)$ を用いて、次式のように仮定する。

$$\sigma_{i,z} = \sigma_{i,z0} + \sum_{m=0}^{\infty} \sigma_{i,z(m)} R_m(\xi) \text{-----}(6)$$

上式の仮定の結果、 $\sigma_{i,z0}$ 、 $\sigma_{i,z(0)}$ を次のように荷重条件で規定することにより、平板の上下表面での応力境界条件(SBC)を完全に満足させることも可能となる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{i,z0} &= (\bar{\sigma}_{i,z}^+ + \bar{\sigma}_{i,z}^-)/2 \\ \sigma_{i,z(0)} &= (\bar{\sigma}_{i,z}^+ - \bar{\sigma}_{i,z}^-)/2 \end{aligned} \right\} \text{-----}(7)$$

以降では、式(5)と(6)の展開形を式(4)に代入し、板厚方向の重み付き積分形の支配式を得る際式(7)に基づいてSBCを満足させた場合(SBC OK)と、式(7)を考慮せず定式化した場合(SBC NO)の2種類の理論式を誘導し、これらによる解析を実施した。

[3] 数値計算例⁵⁾ 本理論を用いた周辺単純支持等方性矩形板($a \times b \times 2c$)の固有振動解析の結果のうちモードパラメタ $\theta = 2.0$ の場合を例にとり、固有振動数パラメタ Ω をTable 1に、曲げの1次(A_1)の板厚モードをFig. 2にそれぞれ示す。また、等方性無限板中の平面調和波の分散解析に関しては、曲げモードの1次から5次($A_1 \sim A_5$)の振動数スペクトルをFig. 3に示す。

これらより、高次理論の精密さと、上下表面の境界条件を満足させた理論の有効性が検証できる。

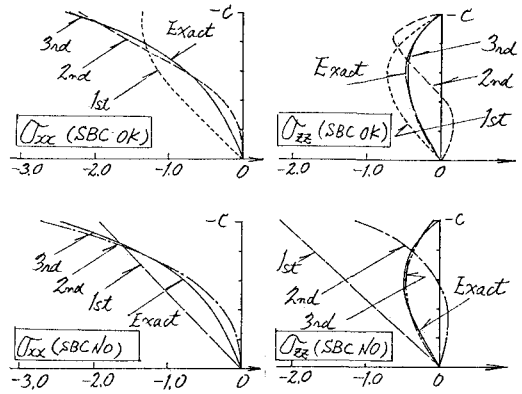


Fig. 2 Distributions of σ_{xx} and σ_{zz} along the thickness for mode (A_1) of simply supported rectangular plate.

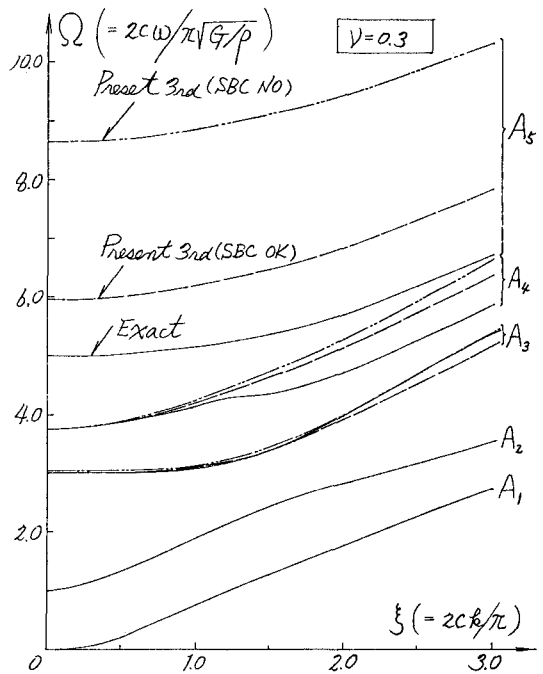


Fig. 3 Antisymmetric frequency spectrum for isotropic plate.

- 参考文献 1) Washizu, K. : "Variational Methods in Elasticity & Plasticity"-3rd ed., pp.411-417, 1982. 2) Reissner, E. : Int. J. Num. Meth. Eng., Vol. 20, pp.1366-1368, 1984. 3) Murakami, H. : J. Appl Mech., Vol. 53, pp.661-666, 1986. 4) Hirashima, K. & Y. Negishi : Proc. JSCE, No. 350, pp.351-354, 1984. 5) Srinivas, S., C. V. J. Rao & A. K. Rao : J. Sound Vib. Vol. 12, pp.187-199, 1970.