立体トラスの最適化における許容応力制約と変位制約

八戸工業大学 学生会員○西塚 寿之
正会員 長谷川 明

1．はじめに

一般に、トラス構造の設計の制約条件には、部材毎に与えられる許容応力、最小板厚および最大細長比の条件と、構造全体に対し許容変位の条件がある。この最適化問題を、部材毎の断面寸法を決定する断面の最適化と、節点座標と部材毎の１変数（例えば断面積）を決定する構造の最適化の２段階に分離して解くことを考えると、前者では多くの場合許容応力の条件が大きな影響を与え、構造最適化で、この許容応力と同時に許容変位の制約を受け最適化することとなる。本論は、構造最適化における、この２つの制約の関係について、簡単な立体トラスを例に考察したものである。

2．計算モデルと計算条件

計算モデルは、図１、２に示すような頂点に水平荷重を受ける３部材、４部材立体トラスで、各部材断面積Ａは同一とし、設計変数は、この部材断面積Ａと節点位置を示す形状パラメータｒとした。すなわち、荷重載荷点の座標は、底面のなす正３角形あるいは正方形の図心位置上に、固定されているものと考えている。また、目的関数はトラス構造に使用される材料の全体積Ｖとし、各部材に対する許容応力σ_aと載荷点の水平変位（y方向）に対する許容変位v_aの制約を与えた。ここで、許容応力σ_aは引張、圧縮とも同一としている。

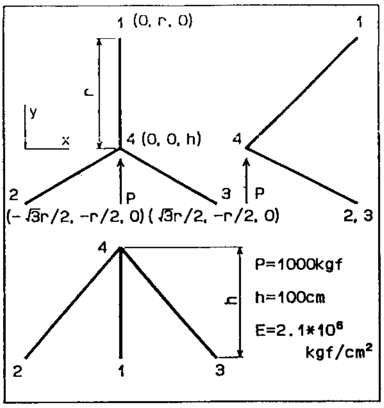

図１　３部材立体トラス

3．設計許容領域と最適解

設計空間に、応力と変位の制約条件および目的関数の等値線を描き、設計許容領域と最適解について考察した。許容応力σ_a＝1000kgf/cm^{2}とし、許容変位v_a＝0.3cm、0.1cmと制約された時の４部材トラスの設計許容領域を描くと、それぞれ図３、図４の斜線部となる。これに目的関数Ｖの等値線$\bar{V}=V\sigma_a/Ph$ を描くと図中のように示され、図３ではＰ点、図４ではＱ点で、それぞれＶが最小となり最適解となる。すなわち、変位条件が緩い図３では許容応力制約が、反対に変位条件が厳しい図４では変位条件が、それぞれアクティブとなって決定している。許容応力と許容変位の組み合せによっては、両者の条件がアクティブとなる図５のケースがある。なお、最適解を与える最適断面積A_{opt}は それぞれの図で異なっているが、 最適な形状を示すパラメータr_{opt}は$r_{opt}/h=0.707$で、同一となっている。

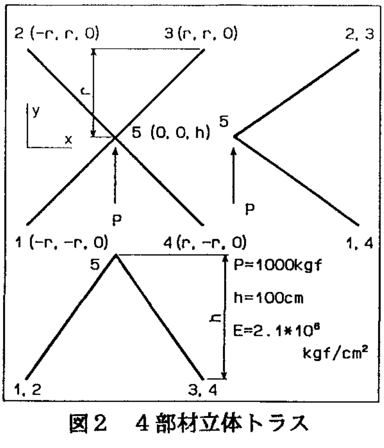

図２　４部材立体トラス

4．許容応力制約と許容変位制約

３部材、４部材トラスの許容応力あるいは許容変位を満たす最適解を解析的に求めたのが表１である。この表から次のことが示されている。

1）３部材トラスから４部材トラスに構造が変化すると、許容応力から求められる最小体積V_{min}は$1/\sqrt{2}$だけ減少できるが、 変位制約から決定されるV_{min}は変わらない。

2）２つの制約条件から求められるV_{min}が等しくなる、 つまり

２つの条件が同時にアクティブとなる時の σ_a と v_a の関係は、構造が変わることによって変化する。

3）このため、同時に変位と応力の制約を受ける時、３部材、４部材トラスに対し同一の変位条件が与えられると、４部材トラスの許容応力は３部材トラスのそれに比べて、$1/\sqrt{2}$ となる弱い材種を用いると経済的となる。例えば、弾性係数 $E=2.1*10^6 kgf/cm^2$、許容応力 $\sigma_a=1000kgf/cm^2$ の時、３部材トラスでは、許容変位 v_a/h が 1/1050であれば、２つの条件に必要とされる最小体積は等しくなる。この制約を、４部材トラスに適用すると、変位条件を満足するためには、３部材トラスと等しい体積が必要となるが、応力条件を満たすには、体積を $1/\sqrt{2}$ 少なくできる。したがって、２つの条件を満足し、最適化された４部材トラスは許容応力に対して余裕のある設計となってしまい、材料の有する強度を十分に発揮できない点で不経済と言える。

5．おわりに

本論は、トラス構造の最適化において影響の大きい許容応力と許容変位の制約の関係について調べ、許容応力制約を受ける構造の構造形式を変えることによって起こる改善は、変位制約に対しても改善できているとは限らないことを述べたものである。計算モデルと計算条件が、単純過ぎるため、今後はより実際的な問題に取り組む必要があると考えている。また、それぞれのトラスの最適形状が、変位制約と応力制約に対し等しいこと、変位制約を満たすための必要体積は、２つのトラスで一致している点については、今後検討したいと考えている。

<参考文献>

Morris.A.J: Foundations of Structural Optimization:A Unified Approach,John Wiley & Sons, 1982

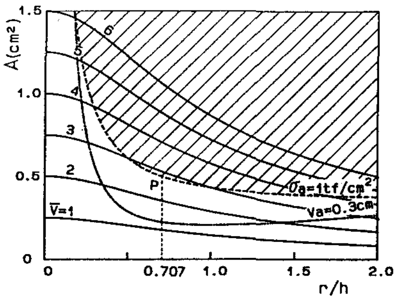

図３　許容領域（v_a=0.3cm）

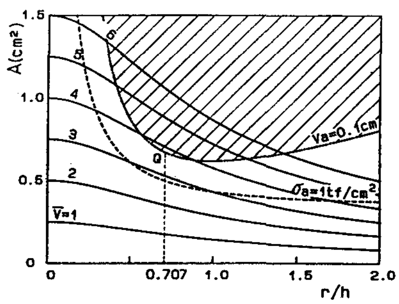

図４　許容領域（v_a=0.1cm）

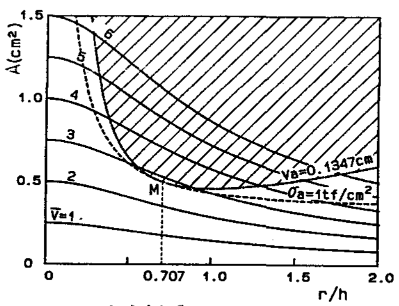

図５　許容領域（v_a=0.135cm）

表１　２つのトラスの最適解の比較

トラスの種類		３部材トラス		４部材トラス	
制約の種類		応力制約 σ_a	変位制約 v_a	応力制約 σ_a	変位制約 v_a
Ｖの一般式		$\frac{2P(r^2+h^2)}{\sigma_a r}$	$\frac{2P(r^2+h^2)^2}{E v_a r^2}$	$\frac{P(2r^2+h^2)}{\sigma_a r}$	$\frac{P(2r^2+h^2)^2}{E v_a r^2}$
最適解	r_{opt}	h	h	$\frac{\sqrt{2}}{2}h$	$\frac{\sqrt{2}}{2}h$
	A_{opt}	$\frac{2\sqrt{2}P}{3\sigma_a}$	$\frac{4\sqrt{2}Ph}{3E v_a}$	$\frac{P}{2\sigma_a}$	$\frac{\sqrt{2}Ph}{E v_a}$
	V_{min}	$\frac{4Ph}{\sigma_a}$	$\frac{8Ph^2}{E v_a}$	$\frac{2\sqrt{2}Ph}{\sigma_a}$	$\frac{8Ph^2}{E v_a}$
V_{min} が等しくなる σ_a と v_a の関係		$\frac{v_a}{h}=\frac{2\sigma_a}{E}$		$\frac{v_a}{h}=\frac{2\sqrt{2}\sigma_a}{E}$	