スタジア定数について

八戸工業大学土木工学科 正会員 岩渕清行

1. まえがき．スタジア定数とは，数学的に云えば，$y = ax + b$ の a, b の事で，初等測量学で，スタジア定数決定問題と云えば，直線あてはめと同じ意味である．スタジア定数決定の場合，我国の測量の正当派である国土地理院の測量士国家試験問題から考えると，x軸の値には誤差があり，y軸の値は誤差なしとする観測態度で実測することになっている．しかし内業すなわちデータから a, b を計算する時には，x軸誤差なし，y軸観測誤差一定の時のあてはめ直線の式を用いる．[1] これは不合理である．しかしながら，いまだかつて，この不合理の由に測量（一般的用語で云う予測）が失敗したとは云われない．直線あてはめ問題はこうゆう実務的特性をもっている．学生（初心者）にスタジア定数決定を測量実習のテーマとして実施させる時を考えると，まさに両軸に，不明の誤差ある時の直線あてはめ問題となる．この場合でもyのxへの回帰直線の公式で a, b を求めてよいことは，測量学が伝統的に認めている。所で，両軸に不明の誤差がある時に対する適当な解直線は昔から色々考えられており，(イ)垂線2乗和最小直線[2]，(ロ) Reduced Major Axis[3]，(ハ)ワルドーバートレット法[4] が有名である．また両軸の誤差の比がほぼ一定と推定し得る場合には，固有名はないが，いくつかの解直線が適当であるとされている．[5),6)] 今これら有名，無名の直線を見るに，その導き出し方はちがっているが，すべて測点の重心を通ることになっている．従って測点の重心を通る直線は，重要な直線である．本文は，この測点の重心を通る直線に関する報告である．

2. 測点の重心を通る直線の幾何学的特性

ここで云う測点とは，あてはめ直線を求めるべき点のあつまりを云う。今測点を $P_i(x_i, y_i)$: $i=1,2,\dots,n$ とする．$n \geqq 3$ である．この測点の相関係数 r は，$r^2 \neq 1$ そして $r \neq 0$ である．細かい事を云えば，yのxへの回帰直線とxのyへの回帰直線が存在しており，夫々を $y = A_1 x + B_1$，$y = A_2 x + B_2$ とする時 $A_1 \neq A_2$ で A_1とA_2の符号はひとしくまた $|A_1| < |A_2|$ である．これらが成り立たない点の集合は，測点とは呼ばない。以下定義をあげて定理をのべる形式で進むが，証明は省略する．[文献 8)は証明の役にたつであろう．]

《定義》 測点の重心（$\bar{x}, \bar{y}$）を通る任意の直線を指定し（勾配A，y切片B）

$a \equiv A_1 * (A - A_2)/(A - A_1)$，$b \equiv \bar{y} - \bar{x} * a$ として $y = ax + b$ なる直線を考え，これをAを親勾配とする子直線と呼ぶ．$y = Ax + B$ をその親直線と呼ぶ．

勾配が無限大になる時，その直線は，重心を通りy軸に平行な直線とする．

（定理1）任意の親直線は常に1本の子直線をもち，それは1本に限る．夫々の勾配が等しくなることはない.」

（定理2）任意の親直線の子直線を，あらためて親直線とみなした時，それから生ずる新しい子直線は，もとの親直線である.」このことを「対関係」と云う．

（定理3）測点の重心を通る無限ケの直線の集合は，対関係となる対の直線から成り立っており，対関係とならない直線は存在しない.」

（定理4）各測点 $P_i(x_i, y_i)$ から任意の勾配Aに平行な直線をひき，それと交わる任意の直線 $y = \alpha x + \beta$ との交点を夫々Q_iとする．線分$\overline{P_iQ_i}$をL_iとし，$f \equiv \sum_{i=1}^{n} L_i^2$ を最小にする時，その$y = \alpha x + \beta$は，Aを親勾配とする子直線である.」この時のQ_i点のことを測点P_iの最確点と云う。（これは定義である）

備考：実用計算式を示す．測点の重心を通るまったく任意の直線 $y = ax + b$ が示された時，
その親勾配は，$A = A_1 * (a - A_2)/(a - A_1)$ で求められる．そして，$\theta \equiv \tan^{-1} A$ とおくとき，
$L_i = (a x_i + b - y_i)/(\sin\theta - a\cos\theta)$，$Q_i$点の座標を$(x_i + \Delta x_i, y_i + \Delta y_i)$とするとき
$\Delta x_i = L_i \cos\theta$，$\Delta y_i = L_i \sin\theta$ である．

備考の続. 親直線が重心を通るy軸に平行な直線の時、子直線は yのxへの回帰直線であり、親直線の勾配が 0の時は、その子直線はxのyへの回帰直線である。 Q_i点が最確点であるとゆう定義は、これらの場合、誤差論における 測点の最確値と一致することは すぐにわかるであろう。一般的に一致するかどうかは 証明を要する。

3. 応用例.

3－1. 親直線と子直線が直交する場合

この場合の親子の勾配は a, Aを未知数とする 次の連立方程式から求められる.

$$\begin{cases} a = A_1 * (A - A_2)/(A - A_1) \\ A \cdot a = -1 \end{cases}$$

これを解くことは. $X^2 + (1/A_1 - A_2)X - 1 = 0$ ……(1) の二根を求めることになる. このうち一根は かならずA_1と同符号になる。それをA_3とし、$B_3 = \bar{y} - \bar{x} * A_3$ とするとき、$y = A_3 x + B_3$ は 垂線2乗和最小直線になる。この直線は多くの人が研究したので 解公式の導き出し方も多くある。[7] しかし変形するとどの手法の場合も (1)式に還元される. この式からわかる如く、この直線は 観測誤差とは独立に存在するものであることは 注意をしておく。別名を直交回帰直線とも云う。

3－2. Reduced Major Axis や Wald and Bartlett 法 の場合.

従来これらのあてはめ直線の時に、測点の最確値とゆう概念はあり得なかった。しかし、これらの場合でも 最確値の定義が可能になり、従って残差が見積られることになる。

4. 問題点 ………両軸の誤差の比がほゞ一定と推定しうる場合.

これは、x_iの標準誤差を σ_{x_i} とする時、$\sigma_{x_i}^2$ が i の いかんにかかわらず一定値 σ_x^2 であり、y_iの標準誤差σ_{y_i}に関しても同様 σ_y^2 がある場合で、$K \equiv \sigma_y^2/\sigma_x^2$ が既知数として与えられる。この場合の最確直線は、学者により異っておる. ある学者は、目的函数 $f \equiv \left(\sum_{i=1}^{n}(ax_i + b - y_i)^2\right)/(K + a^2)$ を最小にする如く a, b を求めよ と云い、ある学者は それに否定的 である。[たとえば 文献 5) 見よ.] そのちがいをわかりやすく云うと、肯定派は、独立等精度観測の時の適合直線は垂線2乗和最小直線であるとするグループであり、否定派は そのことを否定することになる. (上記目的函数の $K = 1$ の場合は まさに垂線2乗和である) 前に注意したように、測点があれば、誤差の概念なしに直交回帰直線は存在する。誤差の概念が入ってくると、人によって、それは、この誤差の時の直線だ、いやそうではないとゆうことになる。このKが既知数として与えられる場合は、Mikhail と Gracieの書いた *Analysis and Adjustment of Survey Measurements* (1981年) 第9章の一般解が、正解を与え得ない場合であり、特殊解法もまだ定説のないものである。今回私がのべた測点のもつ幾何学的性質には、何も非合理的な所はない. 問題は 誤差の考えをいかに矛盾なくそれにあてはめるかとゆうことになる。具体的には文献8)を見られたし。それはKの変化に対し、上記目的函数からの解直線にくらべると、ゆつくり y on x 或は x on y 回帰直線に近づいていく. 最小二乗法としての合理性については今後検討しなければならない。

参考文献

1) 嘉藤種一著 地形測量 オーム社 昭和33年版 PP. 38－39 . この本の答には単純な計算ミスがある。

2) RSバーリントン DCメイ著 林知己夫 勝本和昌監訳 確率統計ハンドブック森北 1977年 P. 143

3) Paul J. Curran and Alan M. Hay *The Importance of Measurement Error for Certain Procedures in Remote Sensing at Optical Wavelenghs*, PE & RS, Vol. 52, No. 2, February. 1986, PP. 229－241

4) J.ジョンストン著 竹内啓その他訳 計量経済学の方法 全訂版下 東洋経済新報社 昭和60年 PP. 322－328

5) 増山元三郎著 少数例のまとめ方改稿版Ⅱ 竹内書店 (1964年) PP. 616－618

6) RJウオナコット THウオナコット著 国府田恒夫他訳 計量経済学序説 PP. 149－151 , 7) 森忠次著 測量学 2応用編 丸善 PP. 367－369, 8) 岩渕清行：第41回 土木学会 講演概要集 第4部 (1986年) PP. 467－468