## KJS方程式の相似解について

東北大学工学部　正員　○京藤敏達
東北大学工学部　正員　　首藤伸夫

### 1．まえがき

地形変化による波の変形の問題は，工学的に重要であり，特に長波に関しては地形が緩やかに変化する場合の近似方程式が Kakutani, Johnson, Shuto によって導かれている.[1] これらの方程式は KdV方程式に摂動を与えたものになり，解の性質，例えばshelfの発生，保存量などが調べられている.[2,3] この論文では，首藤が導いた方程式（KJS方程式）をLie群を使って解析し，その方程式が相似解を持つときの底面および側面形状，また，その保存則について述べる.

### 2．Lieの方程式

KJS方程式は底面及び側面が緩やかに変化する場合の長波の方程式であり，次のように書くことができる.

$$H[u]=u_x+\alpha_1 uu_\xi+\alpha_2 u_{\xi\xi\xi}+\alpha_3 u=0 \tag{1}$$

ここで，$u$ は $x$ および$\xi$の関数であり，$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$は $x$ のみの関数である．Lie の理論においては，微分方程式の変数にパラメータ $\varepsilon$ を含む変数変換を行い，その際の変換を $\varepsilon$ に関する微分方程式で規定する．微分方程式の相似解や保存則について議論するためには，その方程式が持つLieの方程式を求めればよい.[4-6] ここでは，式(1)の関数 $u$ は既にパラメータ $\varepsilon$ で変換されているものとする．すなわち，式(1)を $\varepsilon$ で微分し，その方程式から $\varepsilon$ に関する微分方程式を求める．

$$(d/d\varepsilon)H[u] = L_H[u_\varepsilon] = 0 \ , \ u_\varepsilon = S(x,\xi,u,u_x,u_\xi,\cdots) \ , \ u|_{\varepsilon=0} = u_0 \tag{2}$$

ただし，関数S は $L_H(S)=0$ が $H(u)=0$ となるすべての $u$ に対して成立するように決定し，$u=u_0$は，変換前の式(1)の解である．Lieの方程式 $u_\varepsilon = S$ は，相似解，保存則を求めるときに用いる．ここでは，計算を容易にするためにS の関数形を次のように限定する．

$$S = ku_x - (Pu + Qu_\xi + R). \tag{3}$$

ここで，k, P, Q および R は u を含まない x, $\xi$の関数である．多少計算の後，以下の結果を得る．

$$\begin{aligned} &k = k(x),\ P = p(x),\ Q = q(x)\xi + r,\ k_x\alpha_1 + k\alpha_{1x} + \alpha_1 p + \alpha_1 q = 0, \\ &\alpha_2 k_x + k\alpha_{2x} + 3q\alpha_2 = 0,\ q_x\xi + r_x + \alpha_1 R = 0, \\ &\alpha_3 k_x + k\alpha_{3x} + p_x + \alpha_1 R_\xi = 0,\ R_x + \alpha_2 R_{\xi\xi\xi} + \alpha_3 R = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

次節では，適宜に各$\alpha_i$を与えてKJS方程式の相似解と保存則について議論する．

### 3．KJS方程式の性質

首藤によって導かれた水深および幅の変化を考慮に入れた非線形分散波の方程式は,[1]

$$\eta_x+(3/2)g^{-1/2}d^{-3/2}\eta\eta_{\hat\xi}+(1/6)g^{-3/2}d^{-1/2}\eta_{\hat\xi\hat\xi\hat\xi}+(1/2)(b'/b+d'/2d)\eta=0 \tag{5}$$

である．ここで，$\eta$は波高，g は重力加速度，d は水深，b は水路幅，x は水平方向の座標，$\hat\xi$は時間 tを用いて

$$\hat\xi = \int_{x_0}^{x}(gd)^{-1/2}dx - t \tag{6}$$

と定義されている．また，b', d' は bおよび d の x による微係数である．KJS方程式の性質を調べるとき，次の２つの変数変換が有用である．

CASE I

$$\eta = (2/3)d^2\psi,\ \tau = (1/6)\int_{x_0}^{x} d^{1/2}dx,\ \xi = \sqrt{g}\,\hat{\xi}, \tag{7}$$
$$\psi_\tau + 6\psi\psi_\xi + \psi_{\xi\xi\xi} + \Gamma\psi = 0,\ \Gamma = 3d^{-1/2}(9d'/2d + b'/b)$$

CASE II

$$\eta = (1/2)b^{-1/2}d^{-1/4}\phi,\ \tau = (1/6)\int_{x_0}^{x} d^{1/2}dx,\ \xi = \sqrt{g}\,\hat{\xi},$$
$$\phi_\tau + 6\Lambda\phi\phi_\xi + \phi_{\xi\xi\xi} = 0,\ \Lambda = b^{-1/2}d^{-9/4} \tag{8}$$

CASE I は，KdV方程式に摂動項 $\Gamma\phi$ を加えたものであり，この項によって孤立波にshelf が発生することが理論的に知られている.[3] ここでは，式(7)が相似解を持つ条件を求める．簡単のため R=0 と置くと，$\alpha_1 = 6,\ \alpha_2 = 1,\ \alpha_3 = \Gamma$ より，

$$p = 2q,\ k = -3q\tau + \mu,\ \Gamma = (\lambda-2q)/(-3q\tau+\mu) = \gamma/(3\tau-\mu/q) \tag{9}$$

が得られる．ここで，p, q, r, $\mu$, $\lambda$ は定数である．式(7)の相似解は，$\phi_\varepsilon = 0$ とすれば求めることができ，不変曲面 S = 0 は上の場合，

$$(-3q\tau+\mu)\psi_\tau - 2q\psi - (q\xi+r)\psi_\xi = 0 \tag{10}$$

となる．上式から相似変数が決定され，これを式(7)に代入すると相似解が満足する方程式，

$$\psi = (3\tau-\mu/q)^{-2/3}\hat{\psi}(n),\ n = (\xi+r/q)(3\tau-\mu/q)^{-1/3},$$
$$\hat{\psi}_{nnn} + 6\hat{\psi}\hat{\psi}_n - n\hat{\psi}_n - (2-\gamma)\hat{\psi} = 0,\ \gamma = (2q-\lambda)/q \tag{11}$$

が求められる．ところで，上の$\Gamma$ において $\gamma=3/2$ とすれば，式(7)は cylindrical KdV 方程式となり，IST-type で N-ソリトン解が存在することが知られている.[5]さらに，相似解が存在するときの b 及び d は，

$$bd^{9/2} = [(3q\tau-\mu)/(-q)]^{2/3\gamma}\ b_0 d_0^{9/2} \tag{12}$$

で与えられ，例えば d が一定で$\gamma$が正のとき幅が x 方向に広がり，$\gamma$が負のときはその逆となる．

CASE II の方程式の著しい特徴としては，Lieの方程式と保存量の関係付けができることである．ここでは，詳細を省き結果を述べると，保存密度のグラジエント$\delta C$ を用いてLieの方程式を，

$$\phi_\varepsilon = (\partial/\partial\xi)\delta C \tag{13}$$

と置くことができる.[6] 例えば，$C = \phi, \phi^2$ に対して $\phi_\varepsilon = 0,\ 2\phi_\xi$ が対応する．CASE I と同様にして，$\alpha_1 = 6\Gamma, \alpha_2 = 1,\ \alpha_3 = 0$ と置くと，Lieの方程式は，

$$\phi_\varepsilon = (-3q\tau+\mu)\phi_\tau - p\phi - (q\xi+r)\phi_\xi,\ (\ln\Lambda)_\tau = (2q-p)/(-3q\tau+\mu) \tag{14}$$

となる．上の$\Lambda$は先程述べた地形と同一のものに対応し，式(13)，(14)より保存量 C を求めることができる．

## 4．あとがき

本論文では，Lie の方程式の形が簡単な場合を扱ったが，Lie の方程式を求めることにより相似解や保存量が容易に得られることが分かる．今後，更に詳細な解析を進めることは，地形変化による波の変形を定性的に理解する上で重要である．

参考文献 1)Shuto, N; Coastal Engng. Jpn.,V.17(1974). 2)Miles,J.W.; J.F.M.,V.91(1979). 3)Knickerbocker, C.J. & C. Newell;J.F.M.,V.98(1980). 4)京藤敏達；ながれ, V.3(1984). 5)Freeman, N.C.; Adv. Appl. Mech., V.20(1980). 6)Kumei,S.; J. Math. Phy., V.18 (1977).