

東北大学大学院 学生員 ○ 長尾昌朋
東北大学工学部 正 員 京藤敏達
東北大学工学部 正 員 首藤伸夫

1. はじめに

複素速度ポテンシャルを用いた砕波変形の数値計算は、数多くなされているが、周期的な底面において周期的な波を想定しているものが多い。ここでは、汀線での条件を考慮し、鏡像を重ね合わせることにより、一様勾配斜面上の砕波の数値計算を試みた。

2. 基礎方程式および数値計算法

ここで用いる座標系および記号を図-1に示す。水表面の鏡像は

(1) と表され、これによる複素速度ポテンシャルの鏡像を重ね合

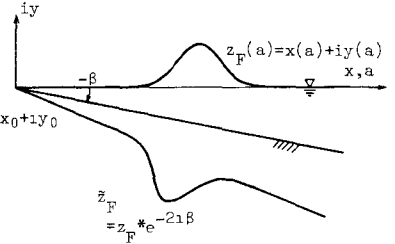


図-1 座標系および記号

$$\tilde{z}_F = z_F^* e^{-2i\beta} \dots\dots\dots (1)$$

$$W(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty \frac{\mu_F'}{z - z_F} \cdot \frac{\partial z_F'}{\partial a'} da' - \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty \frac{\mu_F'}{z - z_F^* e^{-2i\beta}} e^{-2i\beta} \frac{\partial z_F^*}{\partial a'} da' \dots\dots\dots (2)$$

$$\frac{\partial z_F}{\partial t} = \left(\frac{\partial W}{\partial z} \right)^* \quad \text{on } z = z_F \dots\dots\dots (3)$$

$$\text{Re} \left[\frac{\partial W}{\partial t} \right] + \frac{1}{2} \frac{\partial W}{\partial z} \left(\frac{\partial W}{\partial z} \right)^* + g y_F = f(t) \quad \text{on } z = z_F \dots\dots\dots (4)$$

$$\left(\frac{\partial z_F}{\partial t} \right)^* = \frac{1}{2} \frac{\partial \mu_F}{\partial a} \frac{\partial z_F}{\partial a} + \frac{1}{2\pi i} v \cdot p \cdot \int_0^\infty \frac{1}{z_F - z_F'} \cdot \frac{\partial \mu_F'}{\partial a'} da' - \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty \frac{1}{z_F - z_F^* e^{-2i\beta}} \cdot \frac{\partial \mu_F'}{\partial a'} da' \dots\dots (5)$$

$$\left(\frac{\partial z_0}{\partial t} \right)^* = \frac{\pi - \beta - \arg \left(\frac{\partial z_0}{\partial a} \right)}{\pi} e^{i\beta} \cdot \frac{\partial \mu_0}{\partial a} \text{Re} \left[e^{-i\beta} \frac{\partial z_0}{\partial a} \right] + 2e^{i\beta} \text{Re} \left[e^{-i\beta} \frac{1}{2\pi i} v \cdot p \cdot \int_0^\infty \frac{1}{z_0 - z_F'} \cdot \frac{\partial \mu_F'}{\partial a'} da' \right] \dots\dots\dots (6)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mu_F}{\partial t} &= \frac{\partial \mu_F}{\partial a} \text{Re} \left[\frac{\partial z_F}{\partial t} / \frac{\partial z_F}{\partial a} \right] - 2 \left\{ \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial z_F}{\partial t} \left(\frac{\partial z_F}{\partial t} \right)^* + g y_F - f(t) \right. \\ &\quad + \text{Re} \left[\frac{1}{2\pi i} v \cdot p \cdot \int_0^\infty \frac{1}{z_F - z_F'} \left(\frac{\partial \mu_F'}{\partial t} \cdot \frac{\partial z_F'}{\partial a'} - \frac{\partial \mu_F'}{\partial a'} \cdot \frac{\partial z_F'}{\partial t} \right) da' \right] \\ &\quad \left. + \text{Re} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty \frac{1}{z_F - z_F^* e^{-2i\beta}} e^{-2i\beta} \left(\frac{\partial \mu_F'}{\partial t} \cdot \frac{\partial z_F^*}{\partial a'} - \frac{\partial \mu_F'}{\partial a'} \cdot \frac{\partial z_F^*}{\partial t} \right) da' \right] \right\} \dots\dots\dots (7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mu_0}{\partial t} &= \frac{\partial \mu_0}{\partial a} \text{Re} \left[\frac{\partial z_0}{\partial t} / \frac{\partial z_0}{\partial a} \right] - \frac{\pi}{\pi - \beta - \arg \left(\frac{\partial z_0}{\partial a} \right)} \left\{ \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial z_0}{\partial t} \left(\frac{\partial z_0}{\partial t} \right)^* + g y - f(t) \right. \\ &\quad \left. + 2 \text{Re} \left[\frac{1}{2\pi i} v \cdot p \cdot \int_0^\infty \frac{1}{z_F - z_F'} \left(\frac{\partial \mu_F'}{\partial t} \cdot \frac{\partial z_F'}{\partial a'} - \frac{\partial \mu_F'}{\partial a'} \cdot \frac{\partial z_F'}{\partial t} \right) da' \right] \right\} \dots\dots\dots (8) \end{aligned}$$

$$v \cdot p \cdot \int_0^\infty \frac{g' da'}{z_F - z_F'} = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \left[\int_0^{a_0 + \epsilon} \frac{g' da'}{z_F - z_F'} + \int_{a_0 + \epsilon}^\infty \frac{g' da'}{z_F - z_F'} \right] \dots\dots\dots (9)$$

わせることにより底面での境界条件を満たす。水表面をLagrange的に取り扱うと流体内部における複素速度ポテンシャルは(2)となる。ここで、 μ_F は水表面での渦度の強さ、 $'$ のついた関数は積分変数の関数である。水表面での境界条件にはEuler-Lagrange関係式とBernoulliの式を用いると(3)、

(4)となる。ここで、 $f(t)$ は無限遠で左辺が0となるように決める。

(2)～(4)から Z_F 、 μ_F の発展式を導くと(5)～(8)となる。ここで、特異点を含む積分は(9)で定義され、Cauchyの主値と呼ばれる。数値計算には中央差分を用い、陰解法により各時間ステップ毎の Z_F 、 μ_F を解く。

3. 計算結果

初期条件として初期水位のみをあたえた。差分格子は $\Delta a=0.05m$ 、 $\Delta t=1/200s$ である。図-2に50ステップ毎の波形を示す。水表面に途中で振動を生じ、やがて増大して収束条件を満たさなくなる。この原因を調べるために図-3～図-5に200～280ステップの x_F-a 、 y_F 、 μ_F を示す。振動は x_F-a の勾配が負の最大の所、つまり、水粒子が最も接近している場所で生じている。この振動を無くするためにはいろいろな手法があるが、ここでは x_F を時間ステップ毎にスムージングする方法を用いる。その結果を図-6に示す。まだ、砕波には至らないが斜面上での特性を良く再現していると考えられる。

4. おわりに

複素速度ポテンシャルを用いて砕波変形を再現する方程式を導いた。計算法に問題があり、今後解決しなければならない。

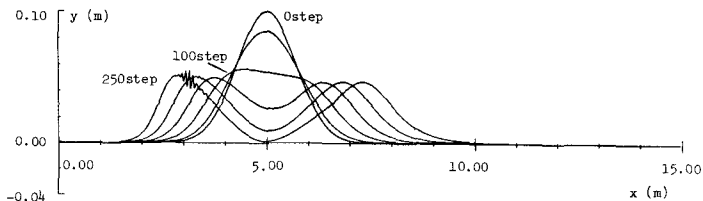


図-2 波形の変化

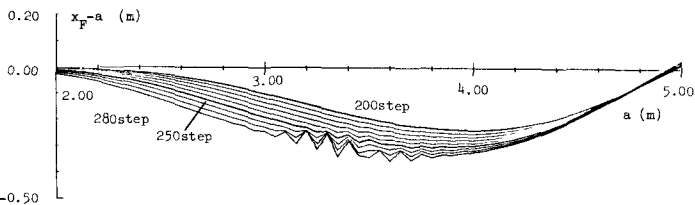


図-3 x_F に現れた振動

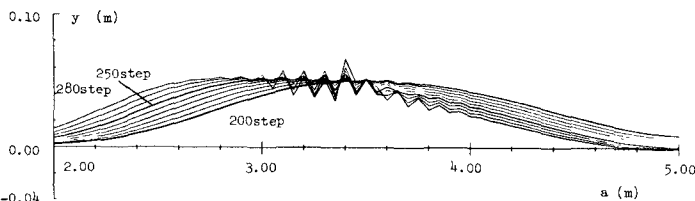


図-4 y_F に現れた振動

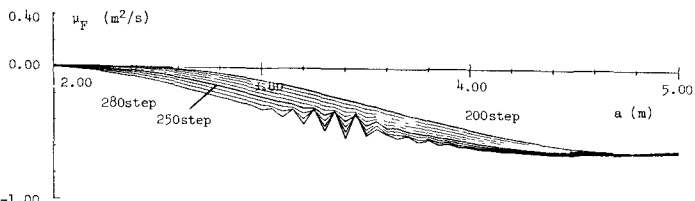


図-5 μ_F に現れた振動

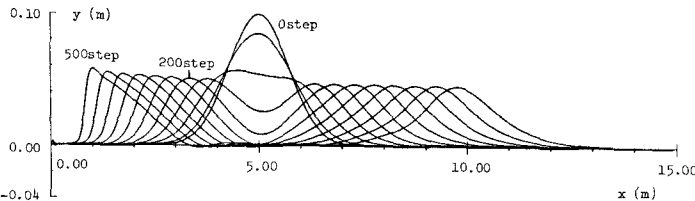


図-6 波形の変化 (x_F をスムージング)

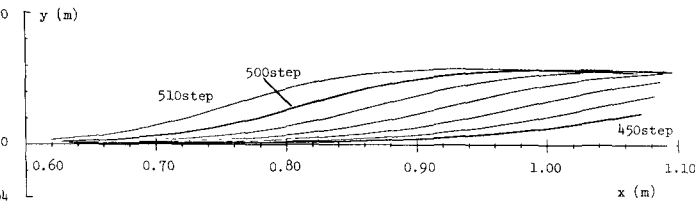


図-7 波形の変化 (図-6の拡大図)