

衝撃力を受ける梁の簡略解法について

岩手大学工学部 正員 ○岩崎 正二

日本大学生産工学部 正員 能町 純雄

1. ま え が き

横衝撃を受ける梁の動的挙動は、静的な荷重を受けた場合と比較してその様相が異なり工学上非常に重要な問題である。そこで、剛球あるいは平底円柱剛体により横衝撃を受ける梁の衝撃力を、有効長の考え方を取り入れた簡略解法によって求め、積分方程式解法による結果と比較検討を行った。従来、簡略解法の研究としては、Lennertz, Lee¹⁾らが剛球と単純梁の衝突問題を衝撃力を $\sin$ 関数に仮定することにより論じている。また Greszczuk²⁾は剛球と円形板の衝突問題を、岩崎³⁾は剛球と弾性床上無限板の衝突問題を、衝撃点の局所変形を考慮したエネルギーのつり合から論じている。本報告ではこれらの手法を無限長はりの衝撃問題に適用し、その有用性について論じたものである。

2. 解 析 理 論

(1) 積分方程式法

無限長梁上に剛体が自然落下した時に接触点において生ずる衝撃力 $P(t)$ を求める問題を考える(図-1)。このとき解くべき基本式は次のようになる。

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho A_1 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = P(t) \Delta(x) \quad \text{《梁の振動方程式》} \quad (1)$$

$$M \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \delta}{\partial t^2} \right) = -P(t) + W_0 \quad \text{《落体の運動方程式》} \quad (2)$$

$$\delta = k P^{\frac{2}{3}}(t) \quad \text{《接触条件式》} \quad (3)$$

ここで、 $W_0 = Mg$, $\Delta(x)$: デルタ関数

$$k = \left[\frac{9\pi^2}{16} \frac{(k_1 + k_2)^2}{R} \right]^{\frac{1}{3}}, \quad k_1 = \frac{1-\nu_1^2}{\pi E_1}, \quad k_2 = \frac{1-\nu_2^2}{\pi E_2},$$

ν_1, ν_2, E_1, E_2 はそれぞれ梁と剛球のポアソン比とヤング率

を表す。 I, ρ, A_1, w : 梁の断面2次モーメント, 単位体積質

量, 断面積, 任意点のたわみ, M, R : 剛球の質量, 半径, g : 重力加速度, w_0, δ は接触点のたわみと剛球の梁へのくいこみ深さを表す。式①, ②, ③を連立して解くと、無限長梁に剛球が衝突した際に生じる衝撃力を定める次のような非線型積分方程式が求まる。

$$k P^{\frac{2}{3}}(t) + \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho A_1 a}} \int_0^t P(\tau) \sqrt{t-\tau} d\tau + \frac{1}{M} \int_0^t P(\tau)(t-\tau) d\tau = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2 \quad (4)$$

ここで、 $v_0 = \sqrt{2gH}$, H : 剛球の落下高さ, $a^4 = EI/\rho A_1$ 。

次に剛球のかわりに平底円柱剛体が自然落下する場合(図-2)は、接触点での衝撃力と局所的変形の関係式を2次元弾性論より次のように仮定する。

$$P(t) = K \delta(t) \quad (5)$$

ここで、 $K = 2E_1 r/(1-\nu_1^2)$, r : 平底円柱剛体の半径, 従って式①, ②, ⑤を連立して解くと無限長梁に平底円柱剛体が衝突した際に生じる衝撃力は、次のような第2種ボルテラ型積分方程式となる。

$$P(t) + \frac{K}{\sqrt{2\pi\rho A_1 a}} \int_0^t P(\tau) \sqrt{t-\tau} d\tau + \frac{K}{M} \int_0^t P(\tau)(t-\tau) d\tau = K(v_0 t + \frac{1}{2} g t^2) \quad (6)$$

ただし、 M は平底円柱剛体の質量である。

(2) 簡 略 解 法

簡略解法には、衝撃力を受ける梁のたわみ曲線を中央に静的な力を加えたときのたわみ曲線と仮定することにより最大衝撃力、最大モーメントを求める方法あるいは衝撃力を $\sin$ 関数で仮定し、その係数を決定することで衝撃力を求める方法がある。今回は、それに新たに有効長の考え方を取り入れた。有効長とは、力の伝達している部分のみが梁として機能しているものと考え、その部分を有効長と呼ぶことにしたものである。

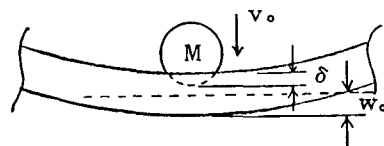


図-1

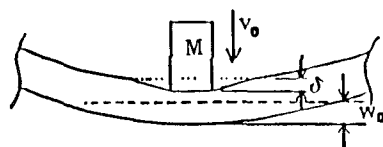


図-2

簡略解法1：剛球が梁に衝突する場合の簡略式を求めるに際しては、まず式②に $\dot{w}_0 + \delta$ を乗じて $0 \sim t_{max}$ まで積分する。ただし t_{max} は衝撃力が最大となる時間である。ドットは時間に関する微分を表す。すなわち、

$$\frac{1}{2} M v_0^2 - \frac{1}{2} M v_1^2 = \int_0^{t_{max}} P(t)(\dot{w}_0 + \delta) dt - W_0 \int_0^{t_{max}} (\dot{w}_0 + \delta) dt \quad (7)$$

ただし、 $v_1 = \dot{w}_0(t = t_{max})$ 。

簡略解法では動的たわみを有効長 l^* の固定支持梁の静的たわみを用いて表す。すなわち

$$w(x, t) = w_0(t)(l^* + 2x)^2(l^* - 4x)/l^{*3} \quad (-l^*/2 \leq x \leq 0) \quad (8)$$

式①に $\dot{w}_0$ を乗じて $0 \sim t_{max}$ まで積分する。その後 x に関しては式⑧を代入し $-l^*/2 \sim l^*/2$ まで積分すると

$$\int_0^{t_{max}} P(t) \dot{w}_0 dt = 96 E_1 I w_0^2(t_{max})/l^{*3} + 13/70 \cdot \rho A_1 l^* v_1^2 \quad (9)$$

式⑦に式③、⑨を代入すると $\frac{1}{2} M v_0^2 - \frac{1}{2} M v_1^2 (1 + \frac{13}{35} \kappa)$

$$= K p w_0^2(t_{max})/2 + 2k \frac{3}{2} \delta^2(t_{max})/5 - W_0 \{W_0(t_{max}) + \delta(t_{max})\} \quad (10)$$

ここで、 $\kappa = W/W_0$ 、 $W = \rho A_1 l^* g$ 、 $K p = 192 E_1 I / l^{*3}$ 、

$$c_0 = \sqrt{E_1 / \rho}, \quad \delta_1 = (2.5 W_0 k^{\frac{2}{3}} H)^{\frac{2}{5}}, \quad l^* = 4.26^4 \sqrt{I / A_1} \sqrt{1.47 c_0 \delta_1 / v_0}$$

次に、 $w_0(t) = P(t)/K p$ ⑩のように仮定すると $v_1 = 0$ となる。今、式⑩に式③、⑨を代入すると最終的に最大衝撃力 P_{max} を求める次のような6次方程式が求まる。

$$C^3 P_{max}^6 + (F^3 - 3 B C^2) P_{max}^5 + 3 \{C(B^2 - A C) - F^2 J\} P_{max}^4 + \{B(6 A C - B^2) + 3 F J^2\} P_{max}^3 + \{3 A(A C - B^2) - J^3\} P_{max}^2 - 3 A^2 B P_{max} - A^3 = 0 \quad (12)$$

ここで、 $A = W_0 H$ 、 $B = W_0 / K p$ 、 $C = 1/2 K p$ 、 $F = 2 k / 5$ 、 $J = W_0 k$ 。

簡略解法2：衝撃力を $P(t) = P_{max} \sin(\pi t / 2 t_{max})$ と仮定する。式④に代入し $t = t_{max}$ とすると最大衝撃力 P_{max} を求める次のような3次方程式が求まる。

$$D^3 P_{max}^3 + (k^3 - 3 L D^2) P_{max}^2 + 3 L^2 D P_{max} - L^3 = 0 \quad (13)$$

ここで、 $D = \frac{2}{\pi} t_{max} \left\{ \frac{0.56174}{\sqrt{2 \pi \rho A_1 a}} \sqrt{t_{max}} + \frac{t_{max}}{M} \left(1 - \frac{2}{\pi}\right) \right\}$ 、 $t_{max} = 1.47 \delta_1 / v_0$ 、

$$L = v_0 t_{max} + g t_{max}^2 / 2$$

3. 数値計算例

数値計算は図-1に示すような無限長矩形コンクリート梁に鋼剛球が落下する問題を扱った。計算には次のような数値を用いた。

梁断面寸法(幅 $b \times$ 高さ h)：

$$b = 10.0 (\text{cm}), \quad h = 2.0 \sim 30.0 (\text{cm})$$

$$\text{ヤング率} : E_1 = 2.7 \times 10^5 (\text{kg/cm}^2)$$

$$\text{ポアソン比} : \nu_1 = 0.167$$

$$\text{単位体積重量} : \rho g = 2.29 (\text{g/cm}^3)$$

$$\text{剛球の半径} : R = 2.0 (\text{cm})$$

$$\text{落下高さ} : H = 1.0 (\text{m})$$

図-3は P_{max}/P_h (最大衝撃力/平面衝突時の

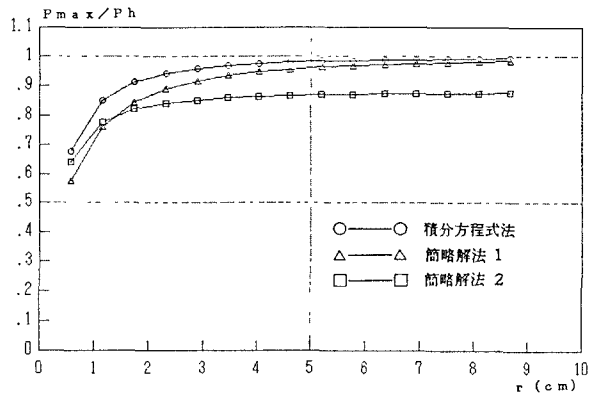


図-3

最大衝撃力)と断面2次半径 r の関係を積分方程式法と簡略解法について表したものである。

【参考文献】

- 1) E. H. LEE: The Impact of a Mass Striking a Beam, Trans. of ASME, Vol. 62, 1940
- 2) Login B. Greszczuk: IMPACT DYNAMICS, Wiley-Interscience, p 60
- 3) 岩崎正二: 衝撃荷重を受ける平板の動的応答解析、岩手大学工学部研究報告第37巻、昭和59年12月、p 127-138
- 4) 岩崎正二、能町純雄: 横衝撃を受ける梁の簡略解法について、第41回土木学会全国大会講演概要集、昭和61年11月、p 745