コンプリメンタリ変分原理に基づく動的はり理論

福島工業高等専門学校　正員　根岸嘉和
〃　学生員　黒澤秀実

1 緒言

はり，平板の動的解析の修正理論の研究は，1921年 Timoshenko[1]がせん断変形と回転慣性を考慮したはり理論を提案したのに端を発し，平板においては1951年にMindlin[2]の理論が提案されて以来活発に行われ，幾多の理論ならびにそれらに基づく解析結果の報告がなされている．しかしその多くは問題の性質上，Hamilton原理に立脚した変位仮定系列に属するものであり，混合仮定型や応力仮定型の動的理論は多くはない．特に応力法系列に関しては Toupin - Crandall 原理[3]に基づき Crandall[4]がTimoshenkoばり理論と同等の理論式を提示して以来，Karnopp と Tabarrok[5]によりその一般化と適用例の報告がなされている外は，幾つかを数える程度に過ぎない．そこで本報告においては，平面動弾性問題における Toupin - Crandall 原理に基礎を置いた動的はり理論を，Tabarrok[6]による静的つり合いモード（0-frequency mode）の除去法をまじえた手法に従って定式化し，それに適切な変形をほどこすことによって各種の動的はり理論と等価な応力法型の理論式が得られることを示すとともに，数値例を通じて解析特性について検討する．

2 理論の定式化

Fig.1 に示すような平面応力状態の等方性等断面ばりの自由振動あるいは分散解析の理論の定式化を考え，動的振動モードにおける応力の力積を $\sigma_{ij}\ (i,j=x,z)$，静的つり合いモードの力積を τ_{ij} で表わし，σ_{ij} のうち σ_{xx} と σ_{xz} を独立成分として採用することとして，系の運動エネルギー T を次式

$$T=\iint\frac{1}{2\rho}\left\{(\sigma_{xx,x}+\sigma_{xz,z})^2+(\sigma_{xz,x})^2\right\}dxdz \qquad \cdots\cdots(1)$$

また，系のコンプリメンタリエネルギー U^* を次式

$$U^*=\iint\left[\frac{1}{2E}\left\{(\dot{\sigma}_{xx}+\dot{\tau}_{xx})^2+\dot{\tau}_{zz}^2-2\nu(\dot{\sigma}_{xx}+\dot{\tau}_{xx})\dot{\tau}_{zz}\right\}+\frac{1}{2G}(\dot{\sigma}_{xz}+\dot{\tau}_{xz})^2\right]dxdz \qquad \cdots\cdots(2)$$

のように置く，上式において ρ, E, ν, G ははりの質量密度，ヤング率，ポアソン比とせん断弾性係数であり（,）つきの添字と（˙）はそれぞれ座標と時間 t に関する偏微分を表わす．これらより補ラグラジアン L^*（$=T-U^*$）を求め，次式の変分原理に持ち込む．

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}L^*dt=\delta\int_{t_0}^{t_1}(T-U^*)dt=0 \qquad \cdots\cdots(3)$$

変分を実行し式を整理することにより次式を得る．

$$\left.\begin{array}{l}\frac{1}{\rho}(\sigma_{xx,xx}+\sigma_{xz,xz})-\frac{1}{E}(\ddot{\sigma}_{xx}+\ddot{\tau}_{xx}-\nu\ddot{\tau}_{zz})=0\\ \frac{1}{\rho}(\sigma_{xx,xz}+\sigma_{xz,xx}+\sigma_{xz,zz})-\frac{1}{G}(\ddot{\sigma}_{xz}+\ddot{\tau}_{xz})=0\end{array}\right\} \qquad \cdots\cdots(4)$$

また次式

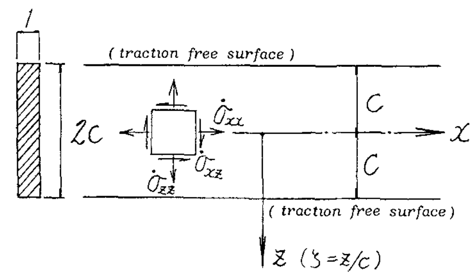

Fig.1 Geometry of beam and coordinate system.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U^*}{\partial\dot{\tau}_{zz}}\right)=0 \qquad \cdots\cdots(5)$$

を用いることにより次のような関係式を得る

$$\ddot{\tau}_{zz}=\nu(\ddot{\sigma}_{xx}+\ddot{\tau}_{xx}) \qquad \cdots\cdots(6)$$

さらに静的つり合いモードの運動エネルギーの条件式

$$\iint\frac{1}{2\rho}\left\{(\tau_{xx,x}+\tau_{xz,z})^2+(\tau_{xz,x}+\tau_{zz,z})^2\right\}dxdz=0 \qquad \cdots\cdots(7)$$

より次式を得る

$$\left.\begin{array}{l}\ddot{\tau}_{x,x}+\ddot{\tau}_{xz,z}=0\\ \ddot{\tau}_{xz,x}+\ddot{\tau}_{zz,z}=0\end{array}\right\} \qquad \cdots\cdots(8)$$

式(4)を式(8)に代入し，式(6)を用いて整理することにより，次式のような平面応力問題の動的な支配方程式に到達する．

$$\left.\begin{aligned}&\frac{E}{1-\nu^2}\{(\sigma_{xx,x}+\sigma_{xz,z})_{,xx}-\nu(\sigma_{xx,x}+\sigma_{xz,z})_{,zz}\}\\&\qquad\qquad-\rho\ddot{\sigma}_{xx,x}=0\\&\left\{G+\frac{\nu E}{1-\nu^2}\right\}(\sigma_{xx,x}+\sigma_{xz,z})_{,z}+G\sigma_{xz,xx}\\&\qquad\qquad-\rho\ddot{\sigma}_{xz}=0\end{aligned}\right\}\quad\text{------}(9)$$

ここで第1次近似としてσ_{xx}, σ_{xz}を次のように置く.

$$\left.\begin{aligned}\sigma_{xx}&=\sigma_{xx}^{(1)}P_1(\zeta)=\sigma_{xx}^{(1)}\zeta\\\sigma_{xz}&=c\sigma_{xz}^{(1)}R_1(\zeta)=c\sigma_{xz}^{(1)}\frac{1}{2}(\zeta^2-1)\end{aligned}\right\}\quad\text{------}(10)$$

上式を式(9)に代入し各2ζと1の重みを乗じた積分表示にまとめると次式を得る.

$$\left.\begin{aligned}&\frac{E}{1-\nu^2}(\sigma_{xx,xx}^{(1)}+\sigma_{xz,xz}^{(1)})-\rho\ddot{\sigma}_{xx}^{(1)}=0\\&\frac{E}{2(1-\nu)}(\sigma_{xx,x}^{(1)}+\sigma_{xz}^{(1)})-\left(\frac{c^2}{3}\right)G\sigma_{xz,xx}^{(1)}+\left(\frac{c^2}{3}\right)\rho\ddot{\sigma}_{xz}^{(1)}=0\end{aligned}\right\}\quad\text{------}(11)$$

また式(9)におけるポアソン比を$\nu=0$と置き, 直応力に関し1軸応力状態の構成関係式を用いた場合について同様の定式化を行うと次式となる.

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{\rho}(\sigma_{xx,xx}^{(1)}+\sigma_{xz,xz}^{(1)})-\frac{1}{E}\ddot{\sigma}_{xx}^{(1)}=0\\&\frac{1}{\rho}(\sigma_{xx,x}^{(1)}+\sigma_{xz}^{(1)})-\left(\frac{c^2}{3}\right)\frac{1}{\rho}\sigma_{xz,xx}^{(1)}+\left(\frac{c^2}{3}\right)\frac{1}{G}\ddot{\sigma}_{xz}^{(1)}=0\end{aligned}\right\}\quad\text{------}(12)$$

式(12)の第2式のGを補正係数$\kappa^2=5/6$を乗じたもので置き換えればCrandallの定式化したはり理論の式に一致することから, 上式はTimoshenkoはり理論におけるせん断補正係数を$\kappa^2=1$と置いた場合と等価な式であることが分かる.

次に1自由度の理論式を誘導する. まず式(9)で$\nu=0$と置いてσ_{zz}の影響を無視し, 第2式のGをκ^2を乗じた形で用いた次式から出発する.

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{\rho}(\sigma_{xx,x}+\sigma_{xz,z})_{,x}-\frac{1}{E}\ddot{\sigma}_{xx}=0\\&\frac{1}{\rho}(\sigma_{xx,x}+\sigma_{xz,z})_{,z}+\frac{1}{\rho}\sigma_{xz,xx}-\frac{1}{\kappa^2G}\ddot{\sigma}_{xz}=0\end{aligned}\right\}\quad\text{------}(13)$$

上式の第1式を第2式に代入して次式を得る

$$\frac{1}{\rho}\sigma_{xz,xxx}=-\frac{1}{E}\ddot{\sigma}_{xx,z}+\frac{1}{\kappa^2G}\ddot{\sigma}_{xz,x}\quad\text{------}(14)$$

式(14)に式(10)の展開仮定を導入する

$$c\sigma_{xz,xxx}^{(1)}R_1(\zeta)=-\left(\frac{1}{c}\right)\frac{\rho}{E}\ddot{\sigma}_{xx}^{(1)}+c\frac{\rho}{\kappa^2G}\ddot{\sigma}_{xz}^{(1)}R_1(\zeta)\quad\text{------}(15)$$

この式に静的なつり合い条件式から得られる次式

$$\sigma_{xz}^{(1)}=-\sigma_{xx,x}^{(1)}\quad\text{------}(16)$$

を仮定して代入することによって, さらに1つの静的つり合いモードを除去し, 最後に高さ方向に積分した表示で表わせば, 次式を得る.

$$\left(\frac{c^2}{3}\right)\sigma_{x,xxxx}^{(1)}=-\frac{\rho}{E}\ddot{\sigma}_{xx}^{(1)}+\left(\frac{c^2}{3}\right)\frac{\rho}{\kappa^2G}\ddot{\sigma}_{xx,xx}^{(1)}\quad\text{------}(17)$$

上式において$\kappa^2=\infty$として右辺第2項を無視するとBernoulli-Eulerの仮定に基づいた古典はり理論の式となり, $\kappa^2=(E/G)=2(1+\nu)$と置いたものは, 回転慣性を考慮したRayleighのはり理論の式に一致し, $\kappa^2=1$と置くとせん断変形のみよりなるBending-Shear状態のはり理論の式と一致するものとなる.

3 数値計算例

無限はり中を伝播する波動(波数k, 位相速度C_φ)の分散関係を以上に示した諸式を用いて解析した結果をFig.2に示す. これより式(11)による解析は必ずしも良好な結果を与えるものではないことが分かる.

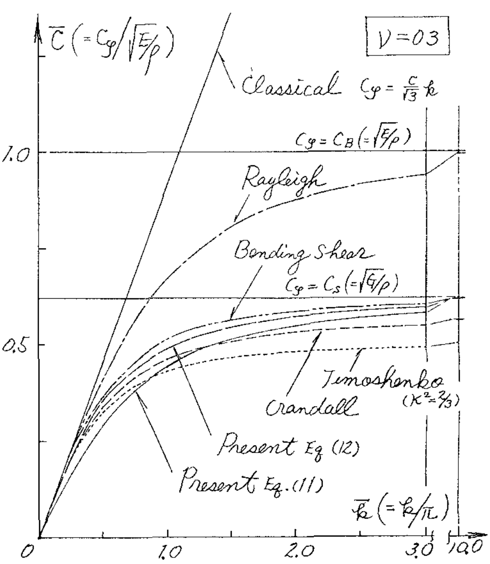

Fig.2 Phase velocity spectrum $\bar{C}$ versus $\bar{k}$ of an isotropic infinite beam with $\nu=0.3$.

参考文献 1) Timoshenko,S.P. : Phil. Mag., Vol.41, pp.744-746, 1921. 2) Mindlin,R.D. : J. Appl. Mech., Vol. 18, pp.31-38, 1951. 3) Toupin,R.A. : J. Appl. Mech., Vol.19, pp.151-152, 1952. 4) Crandall,S.H. : Proc. 9th IUTAM Congr., Brussels, pp.80-87, 1957. 5) Tabarrok,B. & B.H.Karnopp, : ZAMP, Vol.18, pp.580-587, 1967. 6) Tabarrok,B. : The Aero. J. Vol.72, pp.68-70, 1968.