変断面はりの曲げ剛性変化パラメータの離散化によるＢＥＭ数値解析

岩手大学工学部　正会員　○出戸　秀明
岩手大学工学部　正会員　宮本　裕
岩手大学工学部　正会員　岩崎　正二

1．まえがき

はりの解法としてこれまでに、境界要素法の一次元問題として位置づけられる境界積分方程式による手法が厳密解と一致すること、また変断面を有するはりについて、はりの静的曲げ問題の基本解を用いたたわみの離散化による数値解析の手法を示しその有効性について述べてきた。ここでは、さらに曲げ剛性変化パラメータにも離散化をほどこした数値解析の手法を示し、その有効性と汎用性をたしかめている。

2．解析理論

曲げ剛性が関数$\alpha(x)$で変化するはりの静的曲げ問題の微分方程式は式(1)で表され、これに式(2)で定義される静的曲げ問題の基本解$w_0^*(x,y)$をかけ、スパンℓに亘って積分しデルタ関数の性質を考慮することにより式(3)が得られる。

$$EI_0\frac{d^2}{dx^2}\left[\alpha(x)\frac{d^2w(x)}{dx^2}\right]=q(x)\quad\cdots(1)\qquad EI\frac{d^4w_0^*(x,y)}{dx^4}=\delta(x-y)\quad \delta:\text{デルタ関数}\quad(2)$$

$$\begin{aligned}\alpha(y)w(y)=&\Big[Q(x)w_0^*(x,y)-M(x)\theta_0^*(x,y)+\theta(x)M_0^*(x,y)\\&-w(x)\Big\{\frac{d\alpha(x)}{dx}M_0^*(x,y)+\alpha(x)Q_0^*(x,y)\Big\}\Big]_{x=0}^{x=\ell}+\int_0^\ell q(x)w_0^*(x,y)dx\\&+\int_0^\ell w(x)\Big[\frac{d}{dx}\Big\{\frac{d\alpha(x)}{dx}M_0^*(x,y)\Big\}+\frac{d\alpha(x)}{dx}Q_0^*(x,y)\Big]dx\quad\cdots(3)\end{aligned}$$

ただし、

$$\theta(x)=\frac{dw(x)}{dx},\quad M(x)=-EI\frac{d^2w(x)}{dx^2},\quad Q(x)=-EI\frac{d^3w(x)}{dx^3},$$

$$\theta_0^*(x,y)=\frac{dw_0^*(x,y)}{dx},\quad M_0^*(x,y)=-EI\frac{d^2w_0^*(x,y)}{dx^2},\quad Q_0^*(x,y)=-EI\frac{d^3w_0^*(x,y)}{dx^3}$$

ここで、この変断面のはりについて静的曲げ問題の基本解を既知とし、その基本解を用いたならば、式(3)及び 式(3)をyについて微分した２本の式において、$y=0+\varepsilon$、$y=\ell-\varepsilon$（εは微小な正定数）としたときの $\varepsilon\to 0$ の極限を考えることにより得られる４本の方程式より未知量が定まることになるが、変断面はりの基本解を未知とし、等断面はりの基本解を用いたために式(3)右辺最後の積分項が現れこのままでは解くことができない。そのためこれまでは、はりをn分割としたときの分割点のたわみを未知量に加えた、たわみ$w(x)$の離散化による数値解析をおこなってきた。しかし曲げ剛性の変化がスパンℓに亘って$\alpha(x)$という１つの関数で表すことのできないはりについてはこの手法が使えないことになる。

そこで、曲げ剛性変化パラメータ$\alpha(x)$についても離散化をほどこしスパンℓをn分割とし Gauss の積分公式により、$\alpha(x)$を放物線近似としたとき、式(3)右辺最後の積分項は式(4)で表される。

$$\begin{aligned}G(y)=&\sum_{j=1}^{n}\int_{\Gamma_j}w(\xi)\Big\{\frac{d^2\alpha(\xi)}{d\xi^2}\Big(\frac{2n}{\ell}\Big)M_0^*(\xi,y)+2\frac{d\alpha(\xi)}{d\xi}Q_0^*(\xi,y)\Big\}d\xi\\=&\sum_{j=1}^{n}\int_{\Gamma_j}w(\xi)\Big\{(\alpha_{2j-1}-2\alpha_{2j}+\alpha_{2j+1})\Big(\frac{2n}{\ell}\Big)M_0^*(\xi,y)\\&+2\Big\{\Big(\xi-\frac{1}{2}\Big)\alpha_{2j-1}-2\xi\alpha_{2j}+\Big(\xi+\frac{1}{2}\Big)\alpha_{2j+1}\Big\}Q_0^*(\xi,y)\Big\}d\xi\quad\cdots(4)\end{aligned}$$

ただし、ξは無次元座標、$\alpha_1\sim\alpha_{2n+1}$は分割点での曲げ剛性変化パラメータの値。

さらに、たわみを Gauss の積分公式により近似すると、式(3)右辺最後の積分項は、次のように表される。

$$G_j=C_{j\cdot1}w_1+C_{j\cdot2}w_2+C_{j\cdot3}w_3+\cdots\cdots+C_{j\cdot2n+1}w_{2n+1}\qquad(j=1,2,3,\cdots\cdots,2n+1)$$

ただし、$w_1 \sim w_{2n+1}$は分割点（境界点も含む）でのたわみ。

これより式(3)は分割点（境界点も含む）jでの式として表わされ，次のn＋1本の式が得られる。

$$w_j = A_{j\cdot1}Q(\ell) + A_{j\cdot2}M(\ell) + A_{j\cdot3}\theta(\ell) + A_{j\cdot4}w(\ell) + B_{j\cdot1}Q(0) + B_{j\cdot2}M(0) + B_{j\cdot3}\theta(0)$$
$$+ B_{j\cdot4}w(0) + q_j + C_{j\cdot1}w_1 + C_{j\cdot2}w_2 + C_{j\cdot3}w_3 + \cdots\cdots + C_{j\cdot 2n+1}w_{2n+1} \quad (j=1,2,3,\cdots\cdots,2n+1)$$

ただし、$A_{j\cdot n}$ ，$B_{j\cdot n}$ は分割点における式の境界量にかかる基本解の値、q_j は荷重項。また、$w(0) = w_1$，$w(\ell) = w_{2n+1}$ 。

これら2n+1本の式に、式(3)をyについて微分した式より導かれる境界における2本の式を加え、マトリックス式に直し整理して 式(5)を得る。

$$[\,G\,,\ H\,]\{\,w_1, w_2, w_3, \cdots\cdots, w_{2n+1}, Q(\ell), M(\ell), \theta(\ell), Q(0), M(0), \theta(0)\,\}^T$$
$$= -\{\,q_1, q_2, q_3, \cdots\cdots\cdots, q_{2n+3}\,\}^T \qquad (5)$$

ただし、Gは たわみ$w_1 \sim w_{2n+1}$にかかる係数行列、Hは境界量にかかる係数行列。

式(5)の未知量のうち境界条件より定まる4個の境界量を除けば残りの未知量が得られる。つまり、曲げ剛性変化パラメータを離散的に与えることにより変断面はりの問題が解けることになる。

3. 数 値 解 析 例

数値計算は曲げ剛性変化パラメータ$\alpha(x)$が1次～3次の関数で表される場合について行い、$\alpha(x)$を関数で与えた場合、及び$\alpha(x)$を離散的に与えた場合について厳密解との比較検討を行った。

Table-1 にスパンℓの分割数n＝10 としたときの計算結果を示す。

ここで、$w_2 \sim w_{10}$ は分割点でのたわみを表わし、上段は$\alpha(x)$を関数で与えたときの計算結果、中段が$\alpha(x)$を離散的に与えたもの、下段は厳密解である。

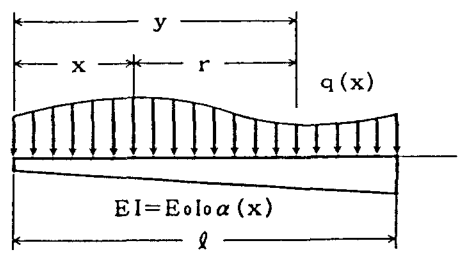

Fig.－1

Table-1

w \ α	1+x/L	1+(x/L)²	1+(x/L)³
w_2	2.96150	3.46081	3.71096
	2.96150	3.46081	3.71096
	2.96177	3.46088	3.71104
w_4	7.43467	8.75321	9.46719
	7.43467	8.75321	9.46719
	7.43523	8.75363	9.46750
w_6	8.79990	10.3554	11.2974
	8.79990	10.3554	11.2974
	8.80048	10.3563	11.2982
w_8	6.91156	8.06883	8.82558
	6.91156	8.06883	8.82556
	6.91198	8.06985	8.82704
w_{10}	2.66731	3.01669	3.29131
	2.66731	3.01669	3.29131
	2.60746	3.01717	3.29229

$(qL^3/10^3 E I_0)$

4. ま と め

数値解析結果から曲げ剛性変化パラメータ$\alpha(x)$が1次、2次の関数で変化する場合には$\alpha(x)$を関数で与えたものと離散的に与えたものは結果が一致し、3次関数で変化する場合には$\alpha(x)$を離散的に与えたものは放物線近似のために多少精度が劣るようであるが、いずれも厳密解によく一致している。

$\alpha(x)$を離散的に与えることにより曲げ剛性が複雑に変化する場合に付いても数値解析が可能となり、さらに連続桁や弾性床上のはりにも適用できることなどから、この手法がはりの問題に有効であり汎用性をもつことが明らかとなった。

参 考 文 献

1)田中正隆・田中喜久昭：境界要素法－基礎と応用，丸善；1982

2)出戸秀明・宮本 裕・岩崎正二：境界積分方程式によるはりの解法，岩手大学工学部研究報告第36巻；1983

3)出戸秀明・宮本 裕・岩崎正二：境界要素法による変断面はりの解法について，土木学会第39回講演概要集；1984

4)登坂宣好・角田和彦：積分方程式法による境界値問題の近似解法，日本建築学会論文報告集第329号；1983