

差分方程式による 周辺固定直交異方性板の解析

岩手大学 正員 宮本 裕
黒沢尻工業高校 正員 ○安彦 敏郎

本報告は、直交異方性板の微分方程式から差分方程式を導き、これを周辺固定板に適用し、数値解析を行い、その結果を、厳密解および、有限要素法による値と、比較検討したものである。

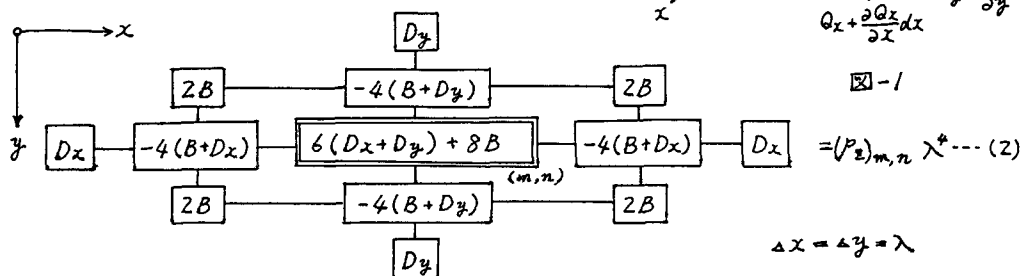
1. 直交異方性板の微分方程式

$$D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2B \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = P \quad \text{----- (1)}$$

$$\therefore D_x = \frac{E_x t^3}{12(1-\nu_x \nu_y)}, D_y = \frac{E_y t^3}{12(1-\nu_x \nu_y)}, D_{xy} = \frac{G_{xy} t^3}{12}$$

$$B = \frac{1}{2}(\nu_y D_x + \nu_x D_y + 4D_{xy})$$

2. 式(1)を差分化して得られる方程式の係数は、次のようになる。



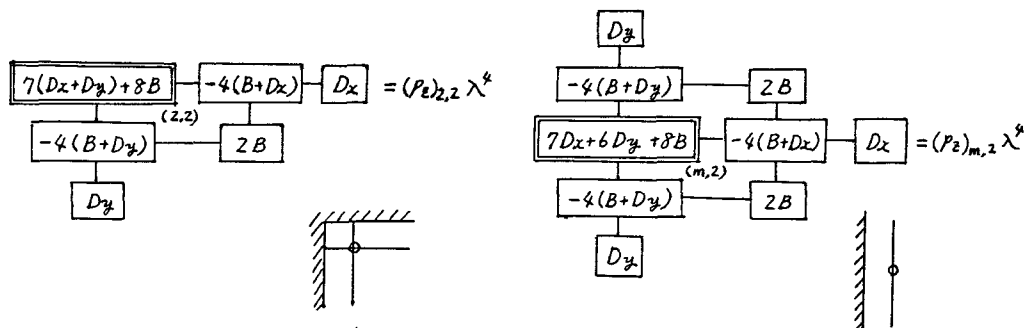
3. 境界条件の処理および計算法

周辺固定であるので、境界条件は次のようになる。

(1). 周辺の変位は0である。 (2). 周辺より外側に仮定の点を考えた場合、これらの点の変位は、周辺に対して対称の位置にある内側の点の変位と等しい。

また、荷重が中央に作用している場合は、板の1/4について、計算を行う。

これらのことから、境界条件処理および対称軸処理を行い、25種類の差分式を誘導する。板を分割し、その各点にこれらの式をあてはめることにより、連立方程式が得られ、これを解くことにより、変位が求められる。



4. 数値計算例

図-2のような、中央点に集中荷重 P が作用する、正方形の周辺固定等方性板について、計算を行う。

ここで、 $P = 1 \text{ kg}$, $a = 150 \text{ cm}$, $t = 0.1 \text{ cm}$

$$E_x = E_y = 2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2, \nu_x = \nu_y = 0.3$$

$$G_{xy} = 8.08 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2, \lambda = 25 \text{ cm} \text{ とする。}$$

各点のたわみは、次の表のとおりである。

節 点	9	14	25	44	49
差分法	0.0089	0.199	0.604	0.199	2.840
FEM	0.0086	0.174	0.580	0.175	2.667
厳密解	0.0090	0.173	0.574	0.173	2.600

FEMは、自由度=節点 $\times 3$ であるから、(49 $\times 3$)元の

連立方程式となるが、差分法では、49元の小マトリックスと

なり、パソコンでも解析が可能である。

なお、FEMは、参考文献(2)のプログラムを用いた。また、厳密解は、次に示す 参考文献(3)の公式を用い計算を行った。

5. 参考 厳密解を求めるために用いた公式は、次のものである。

$$w = w_0 + \sum_{n=1,2,3,\dots} \left(\frac{\beta_n a \tanh \beta_n a \cosh \beta_n x - \beta_n x \sinh \beta_n x}{2 \cosh \beta_n a} \frac{M_{an}}{D \beta_n^2} \right) \cos \beta_n y$$

$$+ \sum_{m=1,2,3,\dots} \left(\frac{\alpha_m b \tanh \alpha_m b \cosh \alpha_m y - \alpha_m y \sinh \alpha_m y}{2 \cosh \alpha_m b} \frac{M_{bm}}{D \alpha_m^2} \right) \cos \alpha_m x$$

ここに、 $\alpha_m = (2m-1)\pi/2a$, $\beta_n = (2n-1)\pi/2b$, ($m, n = 1, 2, 3, \dots$)。 w_0 は特解を表わす。

$$w_0 = \frac{P}{2bD} \sum_{n=1,2,3,\dots} \frac{1}{\beta_n^3} \left[\frac{\beta_n a \tanh \beta_n a + 1}{2 \cosh \beta_n a} \sinh \beta_n (a-x) - \beta_n (a-x) \cosh \beta_n (a-x) \right] \cos \beta_n y$$

M_{an} , M_{bm} は次の式により決定する。

$$n=1,2,3,\dots \text{ に対して } \frac{\cosh \beta_n a \sinh \beta_n a + \beta_n a}{2 \cosh^2 \beta_n a} \frac{M_{an}}{\beta_n a} + \sum_{m=1,2,3,\dots} \frac{2(-1)^m (-1)^n \alpha_m \beta_n}{ab (\alpha_m^2 + \beta_n^2)^2} M_{bm} = \gamma_n$$

$$m=1,2,3,\dots \text{ に対して } \sum_{n=1,2,3,\dots} \frac{2(-1)^m (-1)^n \alpha_m \beta_n}{a^2 (\alpha_m^2 + \beta_n^2)^2} \frac{M_{an}}{\beta_n a} + \frac{\cosh \alpha_m b \sinh \alpha_m b + \alpha_m b}{2 \cosh^2 \alpha_m b} \frac{M_{bm}}{\alpha_m a} = \gamma_m$$

γ_n , γ_m は荷重項を表わし、次のように与えられる。

$$\gamma_n = -\frac{\beta_n a \sinh \beta_n a}{2 \cosh^2 \beta_n a} \frac{P}{2 \beta_n^2 a b} \quad \gamma_m = -\frac{\alpha_m b \sinh \alpha_m b}{2 \cosh^2 \alpha_m b} \frac{P}{2 \alpha_m^2 a^2}$$

6. 参考文献

- (1). Rudolph Szilard: Theory and Analysis of Plates, classical and numerical methods, Prentice-hall, inc
- (2). 辻野哲司: 接着木質パネルの曲げ剛性(第1報), 剛性マトリックスの妥当性について, 木材学会誌 Vol. 26 No. 6 P. 394~399 (1980)
- (3). 土木学会: 構造力学公式集
- (4). 宮本裕, 安房敏郎: 差分方程式による周辺単純支持円板の解析, 土木学会東北支部技術研究発表会講演概要(1981)

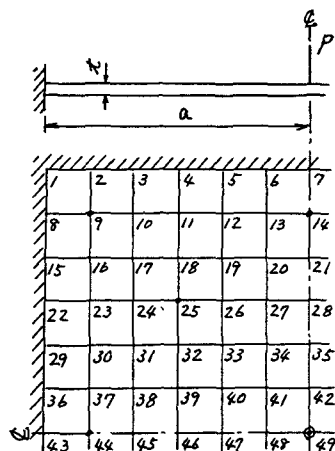


図-2

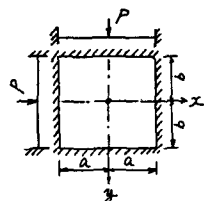


図-3