

逐次近似手法による平板の高次理論

福島工業高等専門学校 正 員 根岸嘉和
学生員 ○ 山野辺 豊

1 緒 言 本報告においては、3次元弾性論の基礎式を逐次満足させていく近似手法に従って静的な平板曲げの高次理論を定式化し、数値計算例を通じて精度の検証を行うと同時に、従来提案されている逐次近似型の平板はり理論との理論特性の比較を行う。なお解析対象は等方性等厚板の線形問題に限定する。

2 理論式の誘導

Fig.1に示すような横荷重を受けた平板曲げの問題を (a) 曲げ状態と (b) 伸縮状態に分解し、各状態の板厚モードの対称性、逆対称性を考慮し、上下表面の応力境界条件 (S.B.C.) を満足させながら、逐次3次元弾性論の基礎式を用いて各次数の理論式を誘導していく。このうち (a) 曲げ状態の定式化手順を流れ図に整理したものが Fig.2 である。図中に示すように、本理論の曲げ状態の1次近似理論は Kirchhoff-Love の仮定に基づく古典平板理論に一致するものであり、第2次近似以降は前に求められた理論式を用い、全く同様の定式化手法によって逐次高次の理論式が誘導され、各次の理論ともたがみ関数 $U_z^{(n)}(x, y)$ のみを未知量とする重調和方程式が支配式となる。これを1次から3次理論まで示せば次のようである。

(第1次近似理論):

$$\frac{2EC^3}{3(1-\nu^2)} \nabla^2 \nabla^2 U_z^{(1)} = p \quad \text{---(1)}$$

(第2次近似理論):

$$\begin{aligned} \frac{2EC^3}{3(1-\nu^2)} \nabla^2 \nabla^2 U_z^{(2)} &= p - \frac{E}{1-\nu^2} \left\{ \frac{(8-3\nu)}{(1-\nu)} \left(\frac{C^2}{10} \right) \nabla^2 \nabla^2 U_z^{(1)} \right\} \\ &= p - \frac{(8-3\nu)}{(1-\nu)} \left(\frac{C^2}{10} \right) \nabla^2 p \quad \text{---(2)} \end{aligned}$$

(第3次近似理論):

$$\begin{aligned} \frac{2EC^3}{3(1-\nu^2)} \nabla^2 \nabla^2 U_z^{(3)} &= p - \frac{E}{1-\nu^2} \left\{ \frac{(8-3\nu)}{(1-\nu)} \left(\frac{C^2}{10} \right) \nabla^2 \nabla^2 U_z^{(2)} \right\} \\ &\quad - \frac{E}{1-\nu^2} \left\{ \frac{(583-480\nu+107\nu^2)}{(1-\nu)^2} \right. \\ &\quad \left. \left(\frac{C^4}{240} \right) \nabla^2 \nabla^2 \nabla^2 U_z^{(1)} \right\} \\ &= p - \frac{(8-3\nu)}{(1-\nu)} \left(\frac{C^2}{10} \right) \nabla^2 p \\ &\quad + \left\{ \left[\frac{(8-3\nu)}{(1-\nu)} \left(\frac{C^2}{10} \right) \right]^2 - \frac{(583-480\nu+107\nu^2)}{(1-\nu)^2} \right. \\ &\quad \left. \left(\frac{C^4}{840} \right) \right\} \nabla^2 \nabla^2 p \quad \text{---(3)} \end{aligned}$$

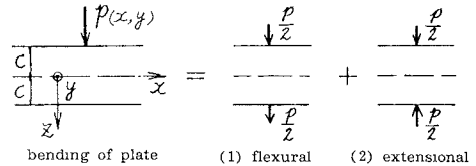


Fig.1 Decomposition of bending of plate into two states.

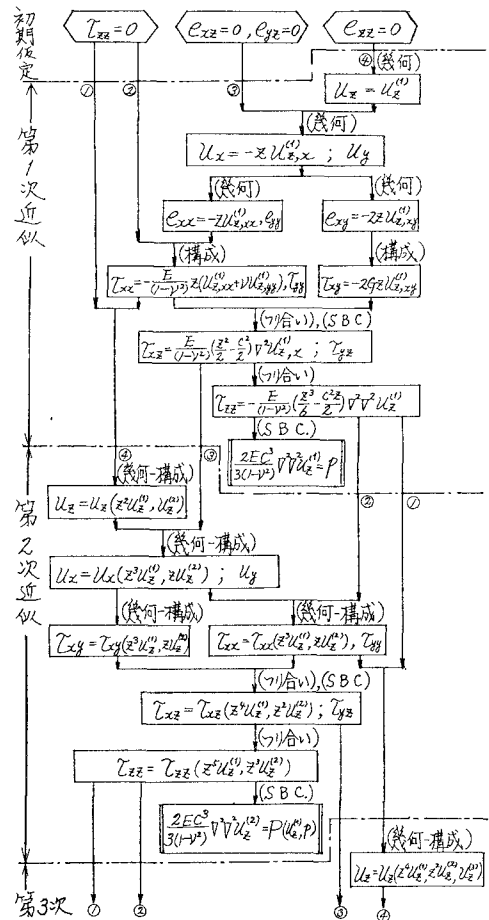


Fig.2 Flow chart of deduction of present theory in case of flexural state.

なお、式(2)、(3)の右辺の第2式は第1次および第1次と第2次近似の支配式を用いて低次のたわみ関数を荷重で表わしたものであり、この手法を順次用いることにより各次の理論の支配式の右辺が荷重 p のみで表わされる。

一方、(6)伸縮挙動に関しても、曲げ挙動に準じた定式化手法により、1次近似理論としては p —一定の場合に広義の平面ひずみ問題となる理論式が得られるのを初め、各次数の理論とも中央平面の面内変位関数 $u_x^{(n)}(x, y)$, $u_y^{(n)}(x, y)$ に関する連立偏微分方程式を支配式とする高次近似理論が構築できる。これらの低次理論の式は次のとおりであり、この場合も式(5)に示すように低次の理論式を用いて変位関数を荷重 p で書き換えることにより、支配式を各次の未知関数と p のみで表わすことができる。

(第1次近似理論)：

$$\frac{EC}{2(1-\nu^2)}\{(1-\nu)\nabla^2 u_x^{(1)} + (1+\nu)e_{,a}^{(1)}\} = \frac{\nu}{1-\nu}\left(\frac{C}{2}\right)p, \alpha \quad (4)$$

ここに $e^{(n)} = u_{x,x}^{(n)} + u_{y,y}^{(n)}$; $a = x, y$ とする。

(第2次近似理論)：

$$\begin{aligned} \frac{EC}{2(1-\nu^2)}\{(1-\nu)\nabla^2 u_x^{(2)} + (1+\nu)e_{,a}^{(2)}\} &= \frac{\nu}{1-\nu}\left(\frac{C}{2}\right)p, \alpha \\ &- \frac{(1+2\nu^2)}{(1-\nu)^2}\left(\frac{C}{2}\right)\nabla^2 p, \alpha + \frac{E}{1-\nu^2}\left\{\left(\frac{C}{2}\right)\{(1-\nu)\nabla^2 u_x^{(1)}\} \right. \\ &+ \left. (1+\nu)\nabla^2 e_{,a}^{(1)}\right\} + \frac{(1-\nu+3\nu^2)}{(1-\nu)^2}\left(\frac{C}{2}\right)\nabla^2 e_{,a}^{(1)}\} \\ &= \frac{\nu}{1-\nu}\left(\frac{C}{2}\right)p, \alpha - \frac{(1-\nu+3\nu^2)}{(1-\nu)^2}\left(\frac{C}{2}\right)\nabla^2 p, \alpha \end{aligned} \quad (5)$$

3 理論特性および他の諸理論との関係

本理論において伸縮状態を無視したものは、西野・椿のより理論に高き方向直ひずみを考慮し平板曲げの問題に拡張したものと同一である。また平島・村松の理論²⁾は曲げと伸縮の複合状態において、面外応力成分の高き方向分布形を固定したままで、高き方向直ひずみを考慮しながら逐次面内成分の高次化をはかった理論である。一方本理論はこれから $Panc$ の理論³⁾とBalush-Voyiadjisの理論⁴⁾のような断面形状型の逐次高次化理論とは異なり、Donnellの理論⁵⁾と同様弾性論の基礎式を逐次高次成分まで満足させた理論である。

参考文献

- 1) 西野・椿・椿龍哉：土木学会第31回講演集I, p.51, 1976.
- 2) 平島・村松・正重：土木学会論文選集, 340号, pp.33~46, 1980.
- 3) Panc, V.: Theories of elastic plates, Noordhoff Int., pp.13-33, 1974.
- 4) Balch, M.H. & G.Z. Voyiadjis : XVth Int. Congr. Theoretical Appl. Mech., Toronto, 1980.
- 5) Donnell, L.H. : Proc. 2nd U.S. Nat. Congr. Appl. Mech., pp.369-373, 1954.
- 6) Goldensveizer, A.L. : PMM, Vol.26, No.4, pp.668-686, 1962.
- 7) Vlasov, V.Z. : Proc. 9th Int. Congr. Appl. Mech., Vol.6, pp.321-330, 1957.

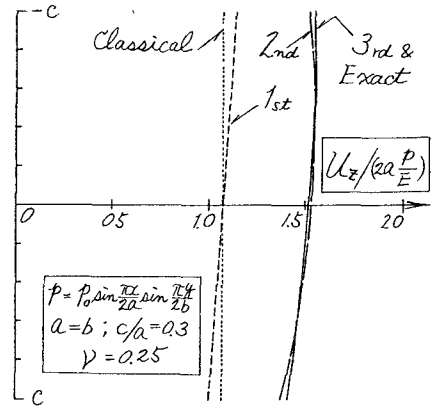


Fig.3 Transverse displacement u_x distributions along the thickness.

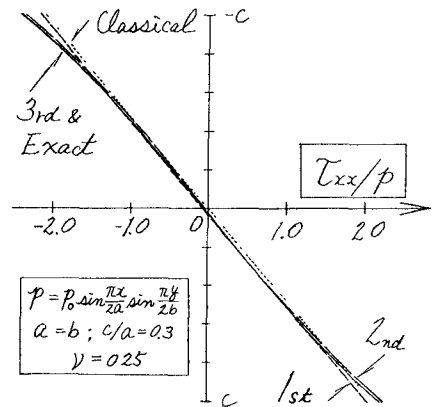


Fig.4 Bending stress T_{xx} distributions along the thickness.

あり、この種の一連の理論(漸近展開法⁶⁾, MIF⁷⁾等)と同等の理論式を逐次近似手法により定式化したものである。

4 数値計算例

上表面に $p = p_0 \sin(\frac{\pi x}{2a}) \sin(\frac{\pi y}{2b})$ なる鉛直荷重を受ける周辺単純支持正方形板($a=b$)を本理論の1次から3次近似理論で解析した結果のうち、鉛直方向変位 u_z と曲げ応力 T_{xx} の板厚方向分布を $c/a=0.3$, ポアソン比 $\nu=0.25$ の場合について示したのがFig.3とFig.4である。両者とも1次近似理論での誤差は大きいが、2次でかなり改善され、3次近似理論では厳密解に等しい値を与えており良好な精度を示している。