多層コンクリート円柱の温度応力に関する研究

秋田大学　正　員　　川上　洵
秋田大学　学生員　○　高橋　功

1．まえがき　各層ごとの材料の性質が異なる多層中実および多層中空円柱が温度変化を受けるとき、熱膨張係数はじめ物性値の違いにより多層構造の内部に固有応力が生じる。このときの弾性応力解析を行い、変位、応力の厳密解を誘導した。その結果、多層コンクリート円柱を構成する材料の諸物性および断面諸元等をパラメーターとし、温度応力をもとめそれらを検討したものである。

2．解析理論

図－1は、多層円柱の微小要素に作用する応力を示す。円柱が同心円状の多層構造であり、軸対称問題となるので応力成分のうちせん断応力$\tau_{r\theta}=0$となる。したがって、半径方向に関するつり合い式は(1)となる。

$$\frac{\partial\sigma_r}{\partial r}-\frac{\sigma_r-\sigma_\theta}{r}=0 \qquad (1)$$

次に、平面ひずみ問題の場合のひずみと応力との関係式を(2)(3)に、ひずみと半径方向の変位uの関係式を(4)(5)に示す。また、これらの式によって求められる応力と変位の関係式を(6)(7)に示す。

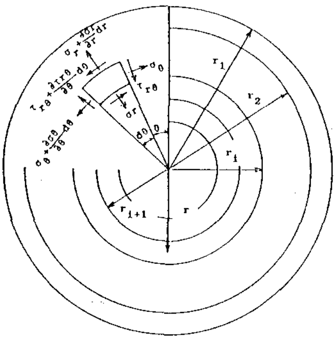
$$\varepsilon_r-(1+\nu)\alpha T=\frac{(1-\nu^2)}{E}\left(\sigma_r-\frac{\nu}{1-\nu}\sigma_\theta\right) \qquad (2)$$

$$\varepsilon_\theta-(1+\nu)\alpha T=\frac{(1-\nu^2)}{E}\left(\sigma_\theta-\frac{\nu}{1-\nu}\sigma_r\right) \qquad (3)$$

$$\varepsilon_r=\frac{\partial u}{\partial r} \quad (4) \qquad \varepsilon_\theta=\frac{u}{r} \quad (5)$$

$$\sigma_r=\frac{E}{(1-2\nu)(1+\nu)}\left\{(1-\nu)\frac{\partial u}{\partial r}+\nu\frac{u}{r}\right\}-\frac{E\alpha T}{1-2\nu} \qquad (6)$$

$$\sigma_\theta=\frac{E}{(1-2\nu)(1+\nu)}\left\{\nu\frac{\partial u}{\partial r}+(1-\nu)\frac{u}{r}\right\}-\frac{E\alpha T}{1-2\nu} \qquad (7)$$



図－1

式(6)(7)をつり合い(1)に代入すると次のような微分方程式が得られる。

$$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 r}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{u}{r^2}=\frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha\frac{\partial T}{\partial r}$$

これより、変位が式(8)のように得られる。また求めた変位を式(6)(7)に代入し、応力が式(9)(10)のように得られる。

$$u=\frac{1+\nu}{1-\nu}\frac{\alpha}{r}\int Tr\,dr+C_1r+\frac{C_2}{r} \qquad (8)$$

$$\sigma_r=\frac{E}{1+\nu}\left\{-\frac{1+\nu}{1-\nu}\frac{\alpha}{r^2}\int Tr\,dr+\frac{C_1}{1-2\nu}-\frac{C_2}{r^2}\right\} \qquad (9)$$

$$\sigma_\theta=\frac{E}{1+\nu}\left\{-\frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha T+\frac{1+\nu}{1-\nu}\frac{\alpha}{r^2}\int Tr\,dr+\frac{C_1}{1-2\nu}+\frac{C_2}{r^2}\right\} \qquad (10)$$

多層円柱を構成する各層に対し、いま、外側から1層，2層，……とする。そのとき、任意の層iにおける変位，応力は、式(11)および(12)(13)のように与えられる。ここで、rは中心からの径であり$r_{i+1}\leqq r\leqq r_i$とする。

$$u=\frac{1+\nu_i}{1-\nu_i}\frac{\alpha_iT}{2}\frac{r^2-r_{i+1}^2}{r}+C_{1i}r+\frac{C_{2i}}{r} \qquad (11)$$

$$\sigma_r=\frac{E_i}{1+\nu_i}\left\{-\frac{1+\nu_i}{1-\nu_i}\frac{\alpha_iT}{2}\frac{r^2-r_{i+1}^2}{r^2}+\frac{C_{1i}}{1-2\nu_i}-\frac{C_{2i}}{r^2}\right\} \qquad (12)$$

$$\sigma_\theta=\frac{E_i}{1+\nu_i}\left\{-\frac{1+\nu_i}{1-\nu_i}\alpha_iT+\frac{1+\nu_i}{1-\nu_i}\frac{\alpha_iT}{2}\frac{r^2-r_{i+1}^2}{r^2}+\frac{C_{1i}}{1-2\nu_i}+\frac{C_{2i}}{r^2}\right\} \qquad (13)$$

これらの式中の積分定数C_{1i}, C_{2i}は応力および変位に関する境界条件により決定される。

i) n層中実円柱

$r=r_1$で半径方向の応力に関し、$\sigma_r=0$であるので

$$\sigma_{r11}=0=\frac{E_1}{1+\nu_1}\left\{-\frac{1+\nu_1}{1-\nu_1}\frac{\alpha_1T}{2}\frac{r_1^2-r_2^2}{r_1^2}+\frac{C_{11}}{1-2\nu_1}-\frac{C_{21}}{r_1^2}\right\}$$

したがって

$$\frac{C_{11}}{1-2\nu_1}-\frac{C_{21}}{r_1^2}=\frac{1+\nu_1}{1-\nu_1}\frac{\alpha_1T}{2}\left\{1-\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2\right\} \qquad (A)$$

$r=r_2$では、1層目と2層目の境界面であり、変位および応力が等しいことから

$$u_{12}=\frac{1+\nu_1}{1-\nu_1}\frac{\alpha_1T}{2}\frac{r_2^2-r_2^2}{r_2}+C_{11}r_2+\frac{C_{21}}{r_2}$$

$$u_{22}=\frac{1+\nu_2}{1-\nu_2}\frac{\alpha_2T}{2}\frac{r_2^2-r_3^2}{r_2}+C_{12}r_2+\frac{C_{22}}{r_2}$$

したがって

$$C_{11}r_2+\frac{C_{21}}{r_2}-C_{12}r_2-\frac{C_{22}}{r_2}=\frac{1+\nu_2}{1-\nu_2}\frac{\alpha_2T}{2}\frac{r_2^2-r_3^2}{r_2}$$

$$C_{11}+\frac{C_{21}}{r_2^2}-C_{12}-\frac{C_{22}}{r_2^2}=\frac{1+\nu_2}{1-\nu_2}\frac{\alpha_2T}{2}\left\{1-\left(\frac{r_3}{r_2}\right)^2\right\} \qquad (B)$$

$$\sigma_{r12}=\frac{E_1}{1+\nu_1}\left\{-\frac{1+\nu_1}{1-\nu_1}\frac{\alpha_1 T}{2}\frac{r_2^2-r_2^2}{r_2^2}+\frac{C_{11}}{1-2\nu_1}-\frac{C_{21}}{r_2^2}\right\}$$

$$\sigma_{r22}=\frac{E_2}{1+\nu_2}\left\{-\frac{1+\nu_2}{1-\nu_2}\frac{\alpha_2 T}{2}\frac{r_2^2-r_3^2}{r_2^2}+\frac{C_{12}}{1-2\nu_2}-\frac{C_{22}}{r_2^2}\right\}$$

したがって $\frac{E_1}{1+\nu_1}\left(\frac{C_{11}}{1-2\nu_1}-\frac{C_{21}}{r_2^2}\right)-\frac{E_2}{1+\nu_2}\left(\frac{C_{12}}{1-2\nu_2}-\frac{C_{22}}{r_2^2}\right)=-\frac{E_2}{1-\nu_2}\frac{\alpha_2 T}{2}\left\{1-\left(\frac{r_3}{r_2}\right)^2\right\}$

$$\frac{C_{11}}{1-2\nu_1}-\frac{C_{21}}{r_2^2}-\frac{1+\nu_1}{1+\nu_2}\frac{E_2}{E_1}\frac{C_{12}}{1-2\nu_2}+\frac{1+\nu_1}{1+\nu_2}\frac{E_2}{E_1}\frac{C_{22}}{r_2^2}=-\frac{1+\nu_1}{1-\nu_2}\frac{E_2}{E_1}\frac{\alpha_2 T}{2}\left\{1-\left(\frac{r_3}{r_2}\right)^2\right\} \qquad \text{(c)}$$

各層間においても上記の条件が同様に成り立ち(B)(C)に相当する式が得られる。

$r=0$ で $u=0$ であるので

$$u=0=\frac{1+\nu_n}{1-\nu_n}\frac{\alpha_n T}{2}\left[\lim_{r\to 0}\frac{r^2-0}{r}\right]+C_{1n}\times 0+\lim_{r\to 0}\frac{C_{2n}}{r}$$

ここで $\lim_{r\to 0}\frac{r^2}{r}=\lim_{r\to 0} r=0$

故に $\lim_{r\to 0}\frac{C_{2n}}{r}=0$

よって $C_{2n}=0$

以上の結果はマトリックスで示される。

$$\begin{bmatrix}
\frac{1}{1-2\nu_1} & \frac{1}{r_1^2} & & & & & \\
1 & \frac{1}{r_2^2} & -1 & -\frac{1}{r_2^2} & & & \\
\frac{1}{1-2\nu_1} & -\frac{1}{r_2^2} & -\frac{1+\nu_1}{1+\nu_2}\frac{E_2}{E_1}\frac{1}{1-2\nu_2} & \frac{1+\nu_1}{1+\nu_2}\frac{E_2}{E_1}\frac{1}{r_2^2} & & & \\
 & & & \ddots & & & \\
 & & & & 1 & \frac{1}{r_n^2} & -1 \\
 & & & & \frac{1}{1-2\nu_{n-1}} & -\frac{1}{r_n^2} & -\frac{1+\nu_{n-1}}{1+\nu_n}\frac{E_n}{E_{n-1}}\frac{1}{1-2\nu_n}
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} C_{11}\\ C_{21}\\ C_{12}\\ C_{22}\\ \vdots\\ C_{2n-1}\\ C_{1n}\end{Bmatrix}
=\frac{T}{2}\begin{Bmatrix}
\frac{1+\nu_1}{1-\nu_1}\alpha_1\left[1-\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2\right]\\
\frac{1+\nu_2}{1-\nu_2}\alpha_2\left[1-\left(\frac{r_3}{r_2}\right)^2\right]\\
-\frac{1+\nu_1}{1-\nu_2}\frac{E_2}{E_1}\alpha_2\left[1-\left(\frac{r_3}{r_2}\right)^2\right]\\
\vdots\\
\frac{1+\nu_n}{1-\nu_n}\alpha_n\\
-\frac{1+\nu_{n-1}}{1-\nu_n}\frac{E_n}{E_{n-1}}\alpha_n
\end{Bmatrix}$$

ii) n 層中空円柱

$r=r_1\sim r_n$ まで n 層中実円柱と同様に成り立ち(A)(B)(C)に相当する式が得られる。

次に $r=r_{n+1}$ すなわち内側中空面において $\sigma_r=0$ であるので

$$\sigma_r=0=\frac{E_n}{1+\nu_n}\left\{-\frac{1+\nu_n}{1-\nu_n}\frac{\alpha_n T}{2}\frac{r_{n+1}^2-r_{n+1}^2}{r_{n+1}^2}+\frac{C_{1n}}{1-2\nu_n}-\frac{C_{2n}}{r_{n+1}^2}\right\}$$

これより $\frac{C_{1n}}{1-2\nu_n}-\frac{C_{2n}}{r_{n+1}^2}=0$

以上の結果はマトリックスで示される。

$$\begin{bmatrix}
\frac{1}{1-2\nu_1} & \frac{1}{r_1^2} & & & & & & \\
1 & \frac{1}{r_2^2} & -1 & -\frac{1}{r_2^2} & & & & \\
\frac{1}{1-2\nu_1} & -\frac{1}{r_2^2} & -\frac{1+\nu_1}{1+\nu_2}\frac{E_2}{E_1}\frac{1}{1-2\nu_2} & \frac{1+\nu_1}{1+\nu_2}\frac{E_2}{E_1}\frac{1}{r_2^2} & & & & \\
 & & & \ddots & & & & \\
 & & & & 1 & \frac{1}{r_n^2} & -1 & -\frac{1}{r_n^2} \\
 & & & & \frac{1}{1-2\nu_{n-1}} & -\frac{1}{r_n^2} & -\frac{1+\nu_{n-1}}{1+\nu_n}\frac{E_n}{E_{n-1}}\frac{1}{1-2\nu_n} & \frac{1+\nu_{n-1}}{1+\nu_n}\frac{E_n}{E_{n-1}}\frac{1}{r_n^2} \\
 & & & & & & \frac{1}{1-2\nu_n} & -\frac{1}{r_{n+1}^2}
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} C_{11}\\ C_{21}\\ C_{12}\\ C_{22}\\ \vdots\\ C_{2n-1}\\ C_{1n}\\ C_{2n}\end{Bmatrix}
=\frac{T}{2}\begin{Bmatrix}
\frac{1+\nu_1}{1-\nu_1}\alpha_1\left[1-\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2\right]\\
\frac{1+\nu_2}{1-\nu_2}\alpha_2\left[1-\left(\frac{r_3}{r_2}\right)^2\right]\\
-\frac{1+\nu_1}{1-\nu_2}\frac{E_2}{E_1}\alpha_2\left[1-\left(\frac{r_3}{r_2}\right)^2\right]\\
\vdots\\
\frac{1+\nu_n}{1-\nu_n}\alpha_n\left[1-\left(\frac{r_{n+1}}{r_n}\right)^2\right]\\
-\frac{1+\nu_{n-1}}{1-\nu_n}\frac{E_n}{E_{n-1}}\alpha_n\left[1-\left(\frac{r_{n+1}}{r_n}\right)^2\right]\\
0
\end{Bmatrix}$$

3. 数値計算例

図-3は、中空2層の場合の数値計算を行い、半径方向の応力を(a)円周方向の応力を(b)に示す。ここで、条件として次のような値を代入した。

$$\begin{bmatrix}
T=10\,^\circ\mathrm{C},\ r_2/r_1=0.8,\ r_3/r_1=0.6\\
E_2/E_1=2.0,\ \nu_2/\nu_1=1.0\\
\alpha_1=8.0\times 10^{-6}\,(1/^\circ\mathrm{C})\\
\alpha_2=\begin{cases}9.6\times 10^{-6}\,(1/^\circ\mathrm{C})\ (\text{———})\\ 12.8\times 10^{-6}\,(1/^\circ\mathrm{C})\ (\text{- - - - -})\\ 16.0\times 10^{-6}\,(1/^\circ\mathrm{C})\ (\text{—·—})\end{cases}
\end{bmatrix}$$

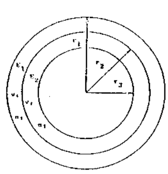


図-2

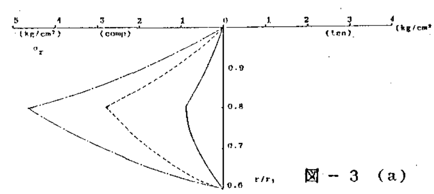


図-3 (a)

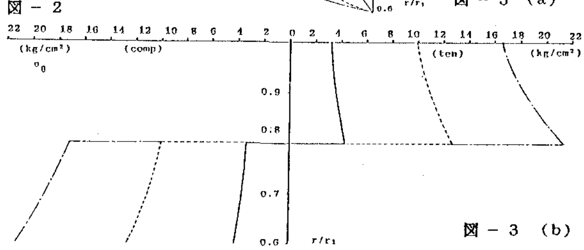


図-3 (b)

この結果から、熱膨張係数の差が大きくなるほど、円柱の内部に生じる応力は大きい値を示すことがわかる。また、境界面における σ_θ の値は、1層目と2層目で引張から圧縮に変っている。

4. むすび

本研究で得られた結果を利用すると、セメントコンクリートとポリマーコンクリートよりなる合成構造円柱、例えば内面が部分ポリマー含浸された鉄筋コンクリート管等に生じる固有応力の算定が容易に行える。また、合成円柱を構成している材料の乾燥収縮による応力の算定にも適用できる。