誤差方程式の重量について

八戸工業大学土木工学科　正会員　岩渕 清行

第1章 はじめに

例を直線あてはめにとる。記号の約束.「測点は $T_i(x_i, y_i)$。$i=1,2,3,\ldots,n$。$n \geqq 3$。原則として両軸に誤差あるものとする．最確値は．$Q_i(x_i+\Delta x_i, y_i+\Delta y_i)$。重さは px_i，py_i。直線は $y=ax+b$ とする．

a，b，Δx_i，Δy_i の満足すべき式は　$y_i+\Delta y_i=a(x_i+\Delta x_i)+b$。　この不定方程式を一意に解くための目的函数は　$f=\sum_{i=1}^{n}(px_i\cdot\Delta x_i^2+py_i\cdot\Delta y_i^2)$.」重さのとり方によって　式のかわり方を　表にしてみると、第1表の如くになる。この表の(7)は　一般の場合で、一般解があるが、　一般解を変形して　その他の場合を

第1表　特種な重量とそれに対する式

NO.	px_i	py_i	誤差方程式	目的函数	備考
(1)	1	∞	$y_i = a(x_i+\Delta x_i)+b$	$f=\Sigma(\Delta x_i^2)$	y軸 誤差なし. x軸 誤差一定
(2)	∞	1	$y_i+\Delta y_i = ax_i + b$	$f=\Sigma(\Delta y_i^2)$	x軸 誤差なし. y軸 誤差一定
(3)	$1/y_i$	∞	$y_i = a(x_i+\Delta x_i)+b$	$f=\Sigma(\Delta x_i^2/y_i)$	y軸 誤差なし. x軸 重さ $1/y_i$
(4)	∞	$1/y_i$	$y_i+\Delta y_i = ax_i + b$	$f=\Sigma(\Delta y_i^2/y_i)$	x軸 誤差なし. y軸 重さ $1/y_i$
(5)	1	1	$y_i+\Delta y_i = a(x_i+\Delta x_i)+b$	$f=\Sigma(\Delta x_i^2+\Delta y_i^2)$	x軸，y軸 共に誤差あり．等精度．
(6)	1	1	〃	〃	(5)と同じ式から 別解が生じる．
(7)	px_i	py_i	$y_i+\Delta y_i = a(x_i+\Delta x_i)+b$	$f=\Sigma(px_i\cdot\Delta x_i^2+py_i\cdot\Delta y_i^2)$	一般式
			備考．一般式(7)の誤差方程式は実際計算の時は線形化する．		

解く時に．ある種の注意が必要である．　((1)～(6)の px_i py_i のことを 特種な重量と称しておく)
市販の本に書いてあるものである。

第2章 解法の公式

第2表　解の公式(番号は第1表に対応)　備考　[x]などは 総和記号

NO.	a の分子	b の分子	分母(a及bに共通)	備考
(1)	$n[y^2]-[y]^2$	$[y][xy]-[x][y^2]$	$n[xy]-[x][y]$	
(2)	$n[xy]-[x][y]$	$[y][x^2]-[x][xy]$	$n[x^2]-[x]^2$	(2)は普通用いる公式
(3)	$[y][1/y]-n^2$	$n[x]-[y][x/y]$	$[x][1/y]-n[x/y]$	
(4)	$[x][1/y]-n[x/y]$	$n[x^2/y]-[x][x/y]$	$[1/y][x^2/y]-[x/y]^2$	(4)は重心を通らない．
				春日屋伸昌著 測量学II 参照

(5)と(6)の解

$$A\equiv[xy]-[x][y]/n:\quad B\equiv[x^2]-[y^2]-([x]^2-[y]^2)/n\quad:\quad \bar{x}\equiv[x]/n:\ \bar{y}\equiv[y]/n$$

$$Z\equiv\sqrt{B^2+4A^2}\quad a_5\equiv(-B+Z)/(2A)\quad:\quad b_5\equiv\bar{y}-a_5\cdot\bar{x}$$

$$a_6\equiv(-B-Z)/(2A)\quad:\quad b_6\equiv\bar{y}-a_6\cdot\bar{x}$$

(≡記号は右辺を左辺とする意)

直線あてはめとして、a_5 か a_6 のいずれかは不適。$a_5 * a_6=-1$　即ち 直交するから 目で見れば 不適はわかる．

(7)の解　a，b の近似値を夫々 a，b とする．(px_i，py_i の函数形は　場合場合により異った式をかきこむ)

$$W_i\equiv ax_i+b-y_i\quad:\quad P_i\equiv 1/(a^2/px_i+1/py_i)$$

$$Z\equiv[px^2][px]-[px]^2$$

……………(pは P_i，以下同様)

$$\Delta a\equiv([px][pW]-[pWx][p])/Z\quad:\ \Delta b\equiv([pWx][px]-[px^2][pW])/Z$$

$$a\equiv a+\Delta a\quad:\quad b\equiv b+\Delta b$$

くりかえし計算をする．　$|\Delta a|$，$|\Delta b|$ が 計算器の能力をこえたら．くりかえしをやめる。

この解法を使用する時の注意を後でのべる。

第3章 等精度（重さ一定） とゆう事について

実際計算から云つて、等精度とは、$P_{x_i}=1$, $P_{y_i}=1$ 以外の何ものでもない。その実行式が $f=\sum(\Delta x_i^2+\Delta y_i^2)$ である。 さて今 $\overrightarrow{T_iQ_i}$ なるベクトルを考える。（約束事項参照） その大きさを L_i とする。$\overrightarrow{T_iQ_i}$ の x, y 成分は $\Delta x_i, \Delta y_i$ である。 ここで 等精度とゆう条件は、まつたく考えないで $\Delta y_i/\Delta x_i=1$ 定とゆう条件をもつてきてみよう。$\overrightarrow{T_iQ_i}$ の方向角は θ とおくと、$\theta=\tan^{-1}(\Delta y_i/\Delta x_i)$ である。 さて、認意の θ のもとで、 $f(\theta)=\sum_{i=1}^{n}(L_i^2)$ を最小にする如く $y=ax+b$ を 求める事を考える。約束により、$L_i^2=\Delta x_i^2+\Delta y_i^2$ だから、 任意の θ で求めた直線は、等精度とゆう考えをどこにも使わなかつたにもかゝわらづ、等精度の実行式をつかつて求めた事になる。 $L_i=(ax_i+b-y_i)/(\sin\theta-a\cos\theta)$ であるから、 $\partial f(\theta)/\partial a=0$, $\partial f(\theta)/\partial b=0$ より、a, b は 次式により計算することになる。

$$a=\frac{\sin\theta\left(n[xy]-[x][y]\right)-\cos\theta\left(n[y^2]-[y]^2\right)}{\sin\theta\left(n[x^2]-[x]^2\right)-\cos\theta\left(n[xy]-[x][y]\right)} \quad : \quad b=\bar{y}-\bar{x}\,a \cdots\cdots\cdots\cdots (8)$$

a, b は θ の函数である。θ を $0°$ から $180°$ まで 連続的に動かし、$y=ax+b$ のグラフをかくと、（実数の濃度で）重心を通るすべての直線がえがかれる。但し a の分母を 0 とする θ では エラーとなるが、その時の直線は $x=\bar{x}$ である。(1), (2), (3), (5) の直線は、a, b を求めるための正規方程式が $\bar{y}=a\bar{x}+b$ を満足しているので、 (8) であらわされる 直線の中に含まれる。 実際 (8) 式において $\theta=90°$ とすれば、得られる直線は (2) と同じになり、$\theta=180°$ とすれば (1) となる。（ θ の時と $\theta+180°$ の時は同値。） (1) や (2) は、等精度の場合とは云わないので、疑問はある。

さて、(8) 式から求める あてはめ直線のうち 市販の本にかかれている直線が あと二本ある。一つは (5) 或は (6) である。このあてはめ直線を (8) 式から求めるには、 $f(\theta)$ の最大、或は $f(\theta)$ の最小になる時の直線を さがせばよい。電卓があれば、答は簡単に求められる。

(3) 式の答を (8) 式から求める事は出来ないが、(3) 式の答が与えられたとき、それは θ が何度 の時の (8) 式から求めた 答と一致しているかを示すのは 簡単である。

さきに、(8) 式によつて、重心を通るすべての直線があらわれると云つたが、 もし θ を $10°$ 毎に変化させて $y=ax+b$ の直線をかけば、スタジア定数決定のためのデーターのような場合には、プロツターの筆の太さの一本の直線しかあらわれてこない。何本もあらわれるのは、記帳ミスの時だけである。こまいことを云えば、θ を $0°$ から $180°$ まで変えた時（みかけ上）、ほとんどの直線は (1) と (2) の中に入つており、$f(\theta)$ min の所が一番密に見える。(8) 式の a の分母を 0 にする θ と、$f(\theta)$ を max にする θ とは、非常に近い値だが、その θ の附近では 直線は 極めてまばらのように（見かけ上は）なつている。そうゆう所の $y=ax+b$ は、勿論、実用にはならない。(8) 式から出てくる直線で実用になるのは、$\theta=90°$ 或は $\theta=180°$ の時だけであろう。$f(\theta)$ が min になる時の直線は、垂線2乗和最小の考えで求めた直線そのものであるが、軸の単位のとり方で、予測に対し、ちがつた答をあたえてしまう。軸の単位に無関係なのは、$\theta=90°$ と $\theta=180°$ の時だけである。

備考：(3) 式 或は (4) 式による解の場合 軸単位に無関係である。（(3) の解を (8) から求め得ない理由であろう。）

第4章 一般解（7）への注意

第2表の (1) の解は、線形化しないで求めたものであるが 原式は非線形である。線形化して正しい解を求め得る。しかし線形化するにあたり、第1表にかいたまゝの形でやると、結果の答は (2) と同じになる。(7) の場合には、 線形化の時 今のべたような具合の悪い事をさけられない。それ故に (7) を用い、第1表にかいた「特種な重量」の場合を計算する時、例えば (1) の答を求めようとすれば (2) の答が出てくる。(3) を得んとすれば (4)、(5) を得んとすれば (2) が出てくる。こうならないような一般式を私はまだ作れないでいる。

参考文献　本間仁、春日屋伸昌共著　次元解析・最小2乗法と実験式　PP. 255～258
森忠次著　測量学2応用編　PP. 359－369.