平面線形へのエラスチカ曲線の適用補遺

日本大学工学部　正員　木村喜代治

路線の平面線形要素として直線，円，クロソイド曲線が多く用いられており，これに三次放物線，レムニスケート曲線，マッコンネル曲線がある。 著者は先にこの曲線としてエラスチカ曲線を適用することを提案した[2]。 その論拠は基本的に von Schelling の確率統計理論[1]によっている。 それによる曲線は平板上で一定速度で動く１個の動点の移動軌跡として通過２点の位置，曲線長などを一定としたとき偏角の確率の合計が最大となるような最頻径路を示すものである。 著者はこの曲線が自動車の走行時のハンドル操作がスムースに行われること，遠心力の変化が滑らかであること，また緩和曲線および曲線の接続の方法や曲線設置の方法などについて述べた[2]。

元来，エラスチカ曲線は一様な弾性棒が両端から押されたときに生ずる弾性変形に伴うエネルギー最小の条件からも導かれる。 また著者らは水流の自由蛇行流の平面形状を，水流の持っている運動エネルギーの距離的合計が最小であるという条件から導きこれがエラスチカ曲線に相似であることを示した[5]。

このようなことから，自動車あるいは鉄道車両などが路線に沿って走行する際に，無理のない自然な走行であるべきだと考える。 換言すれば路線の形状はそのような走行のできる形状であることが望ましい。
本報はこの曲線の誘導について自動車を剛体とみて剛体の運動エネルギーの観点から考察を試みたものである。

剛体の運動が曲線をなすとき，その剛体の有する運動エネルギーは

$$E=1/2\cdot mv^2+1/2\cdot I_G\,\omega^2 \qquad (1)$$

である。 vは剛体重心の移動速度，I_Gは重心を通り運動平面に垂直な軸の周りの慣性能率，mは質量，ωは回転角速度である。 よく知られているように 式（１）右辺第１項は剛体の曲線に沿った並進運動エネルギー，第２項は剛体の重心軸周りの回転運動エネルギーである。 さて自動車の走行を考えるとこの回転運動は重心の走行軌跡曲線（または曲線に沿った走行時はその曲線）に無関係に存在するものではない。
自動車の車両の中心線（自動車は左右対称とする）は，走行中常に軌跡曲線の接線方向を示す運動である（ハンドル操作によってそのような運動をする）。 従って $\omega=v/r$ ただしrは曲線の曲率半径。

さて，曲線上の各点における運動エネルギーの曲線長に沿った総和を考える。 通過２点の位置と，その２点間の曲線長を一定としたとき，しゅしゅの曲線のうちで曲線に沿った運動エネルギーの総和が最小な曲線はどのような曲線になるかを考える。 まず自動車が一定速度で走行するものとすれば曲線長が一定であるから，何れの曲線に沿っても並進運動エネルギーの総計は同じである。 そこで曲線に沿った重心周りの回転運動エネルギーを計算し比較することになる。 すなわち

$$\int 1/2\cdot I_G\,\omega^2\,ds=1/2\cdot I_G\,v^2\int 1/r^2\,ds=\mathrm{Minimum} \qquad (2)$$

これに曲線長が一定ということより

$$\int\cos\theta\,ds=\mathrm{Const.} \qquad (3)$$

Fig. 1

θ：２定点を結ぶ線と曲線の接線とのなす角。 変分学における Euler の微分方程式は

$$\frac{\partial (f+\lambda g)}{\partial \theta} - \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial (f+\lambda g)}{\partial (d\theta/ds)}\right) = 0 \qquad (4)$$

ここで　$f=1/2\cdot I_G v^2\cdot 1/r^2=1/2\cdot I_G v^2 (d\theta/ds)^2$, $g=\cos\theta$
よって　式（4）は　$I_G v^2\cdot d^2\theta/ds^2+\lambda\sin\theta=0$

$$ds=\sqrt{\left(\frac{I_G}{\lambda}\right)}\cdot v\frac{d\theta}{\sqrt{(2(C+\cos\theta))}}=A\frac{d\theta}{\sqrt{(2(C+\cos\theta))}} \qquad (5)$$

ここで　$\sqrt{(I_G/\lambda)}\cdot v=A$　であり，Aは〔L〕の次元を有する。　Aは曲線の要素の一つ例へば曲線長が与えられると決定される。　またCは曲線の幾何条件により決定される。　式（5）は著者論文[2]の式（1）に当たる。　これにより一つの曲線が決定され，この曲線が　Elastica　曲線[3]，静水圧曲線[4]，von Schelling による等速動点の最高頻度曲線[1]，水流の自由蛇行曲線[5]などと全く相似であり，単振子の運動方程式とも相似である。　すなわち[2]

$$rz=-A^2 \qquad (6)$$

この解にはだ円積分が含まれる。　路線の平面線形として，その曲線設置には精度のよい積分値を必要とする。現存のだ円積分の関数表はこの目的のためには充分でない。　そこでコンピューターなどを用いて計算する必要がある。　この数値計算で，特に第二種不完全だ円積分が問題であるが著者の前論文[2]の　式（12），（13）によるとポケットコンピューターなどによって短時間で所要の計算ができる。

さて，一定速度で動く自動車の軌跡がエラスチカ曲線となる場合のハンドル操作と自動車に与えられるトルクとの関係を求めてみる。　このときの自動車の回転角加速度をαとすると

$$\alpha=d/dt\cdot(d\theta/dt)=v^2\cdot d/ds\cdot(1/r) \qquad (7)$$

またハンドルの回転角速度は前論文[2]の　式（5）より（左回りの回転を正とすると負号を付ける）

$$\omega_H=-K_1\,dz/dt=K_1 A^2 v\cdot d/ds\cdot(1/r) \qquad (8)$$

よってトルクをMとすると　$M=I_G\,\alpha$　であるから　式（7），（8）より

$$M=I_G v^2\cdot d/ds\cdot(1/r)=vI_G/(K_1A^2)\cdot\omega_H \qquad (9)$$

よってハンドル回転角速度は自動車の回転角加速度に比例し，従って自動車に与えるトルクに比例する。

―――参考文献―――

1）von Schelling:Most frequent particle paths in a plane, Trans.AGU,Vol.32,No.2,1951.
2）木村喜代治：路線の平面線形へのエラスチカ曲線の適用，土木学会論文集３３０号，１９８３.
3）Love:A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity,Cambridge U.Press, １９３４.
4）Kimura :On the hydrostatic curve, 日本大学工学研究所彙報３４号，１９６７.
5）木村喜代治，髙橋廸夫，長林久夫：自由蛇行流のエネルギー的考察，４０回年講，１９８５.