

秋田大学 正会員 ○薄木 征三
秋田高専 正会員 堀江 保
秋田大学 学生員 佐藤 隆史

1. まえがき 鋼製薄肉ばりの弾塑性解析を、FEMやFSMなどによる連続体としての解析によらず、はり理論を用いて行う場合、弾性問題と同様に変位場の設定が重要である。この際弾性ばりとの大きな相異は、構成方程式がブラントル・ルイスの流れ則に従うこと、そしてこれは変位の増分形で表されていることである。この構成則を厳密に適用すると弾性ばりのように変位場は容易には定まらず、それ故弾性ばりにおける変位場を便宜上採用している場合が多いのである。

本報告は板厚一定の閉じ断面ばりを対象として、上記流れ則を適用した場合の変位場の決定の仕方を述べるものであり、第一近似、第二近似、さらに高度の変位場が存在することを示し、曲げとねじれを受ける円管の場合の計算例を示す。尚、より完全な報告は文献 1) を参照。

2. 仮定と変位場 Fig.1 に座標系を示す。はり

理論の仮定 (1) 横断面積不変より微小変位の範囲で

$$\left. \begin{aligned} u &= u_s - (y - y_s) \phi \\ v &= v_s + (x - x_s) \phi \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

が得られる。ここで (x_s, y_s) はねじり中心 S の座標であり、 ϕ はねじれ角、 u_s, v_s は点 S の x, y 方向変位とする。

仮定 (2) 薄肉であることから $\gamma_n = 0$ が成り立つ。

これより部材軸方向変位は

$$w = w^* - (x - x^*) u_s' - (y - y^*) v_s' - r_n n \cdot \phi' \quad (2) \quad \text{Fig. 1. Coordinate systems}$$

ここで、 w^* は薄肉中心線での w の値である。また

r_s^* は、 $r_s^* = m(x - x_s) - l(y - y_s)$ である。上指標 $*$ は薄肉中心線上の値であることを示す。

薄肉中心面に平行な面内でのせん断ひずみを γ_s とすると $\gamma_s = \partial w / \partial s + \partial \xi / \partial z$ であるから、

($\xi = lu + mv$ で l, m は接線 s の方向余弦)。上式を代入し、 $l = \partial x / \partial s, m = \partial y / \partial s$

に注意すると

$$\gamma_s = \frac{\partial w^*}{\partial s} + \frac{\partial x^*}{\partial s} u_s' + \frac{\partial y^*}{\partial s} v_s' + (2n + r_s^*) \cdot \phi' \quad (3)$$

となる。 $n = 0$ とおくと薄肉中心面内のせん断ひずみ γ_{s^*} となる。

3. つり合いと構成則 薄肉微小要素のつり合い式において直応力 $\sigma = \sigma_z$ の影響を無視すると (仮定(3))、 $\tau \cdot t = q(2) = \text{一定}$ となり、せん断流増分一定となる。

完全弾塑性材料に対するブラントル・ルイスの構成則は次式である。

$$\begin{Bmatrix} \dot{\sigma} \\ \dot{\tau} \end{Bmatrix} = \frac{EG}{E\sigma^2 + 9G\tau^2} \begin{bmatrix} 9\tau^2 & -3\sigma\tau \\ -3\sigma\tau & \sigma^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\epsilon}_z \\ \dot{\gamma}_s \end{Bmatrix} \quad (4)$$

この第2式において、 $n = 0$ (薄肉中心面) とおくと次式を得る。

$$\dot{\gamma}_{s^*} = \frac{\Omega}{Gt} \left(1 + \frac{3\tau^2}{\sigma^2} \right) \dot{\epsilon}_{z^*} \quad \left. \begin{aligned} \Omega &= 1 + \frac{9G\tau^{*2}}{E\sigma^{*2}} & \text{----- plastic portion} \\ \Omega &= 1 & \text{----- elastic portion} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

これと式 (3) で $n = 0$ とおいたものを等置すれば次のようになる。

$$\frac{\partial \dot{w}^*}{\partial s} + \frac{\partial x^*}{\partial s} \dot{u}_s^* + \frac{\partial y^*}{\partial s} \dot{v}_s^* + r_s^* \dot{\phi}^* = \frac{\Omega}{Gt} \dot{q} + \frac{3\tau^*}{\sigma^*} \dot{\epsilon}_z^* \quad (6)$$

問題は $W^*(s)$ をこの方程式を解いて決定することである。ところが上式の右辺には $\epsilon_z^* = \partial W^* / \partial z$ が含まれており、言うまでもなくこの項は未知である。故に上式を $W^*(s)$ について解く為には、適切な繰返し計算が必要となる。第一近似は右辺で $\epsilon_z^* = 0$ として $W_1^*(s)$ を求めることが考えられる。以下この $W_1^*(s)$ を右辺 $\epsilon_z^* = \partial W_1^* / \partial z$ へ代入して第二近似 $W_2^*(s)$ を求め、これを繰返すことにより高次の変位場を決定することができる。この手順をフローチャートにすると Fig.2 のようになる。

4. 円管の曲げとねじりの組み合わせ

Fig.3 に示すような軸曲げとねじりを受ける円管を考える。これは Hill と Siebel によって扱われた問題である。式は省略するがこの問題の場合は管軸方向へ曲げとねじりモーメントが一定であるために、第二近似の変位場収束解となり、Hill と Siebel の解と基本的に一致する。Fig.3 弾塑性境界角 β の求める手続きも文献2)と同じである。

Fig.4 には曲げとねじりモーメントの比 $\alpha = B/T$ の3種に対する円管のねじり剛性の低下の様子を示す。波線が一次近似、実線が二次近似である。後者では全断面が塑性化する場合、ねじり剛性が零となるのに対して一次近似理論ではこれが有限値に止どまり、したがって全ねじれ角も全塑性状態でも有限値に止どまる。

Fig.5 は曲げによる断面の剛体的回転を除いた、いわゆるそり $W^*(S)$ を示す。 $\beta = 25^\circ$ の場合であり、二次近似は文献2)と一致するが、一次近似では1ケタオーダーが小さい値となる。

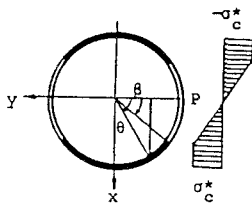


Fig. 3. Circular pipe

参考文献

- 1) S.Usuki, K.Hasebe and Y.Horie, A unified elasto-plastic theory of thin-walled beams and application to bending torsion problems, The first east asian conf. enging and construction, Bangkok, January 15-17, 1986

- 2) R.Hill and M.P.L.Siebel, On combined bending and twisting of thin tubes in the plastic range Phil. Mag., 42, 722-733 (1951)

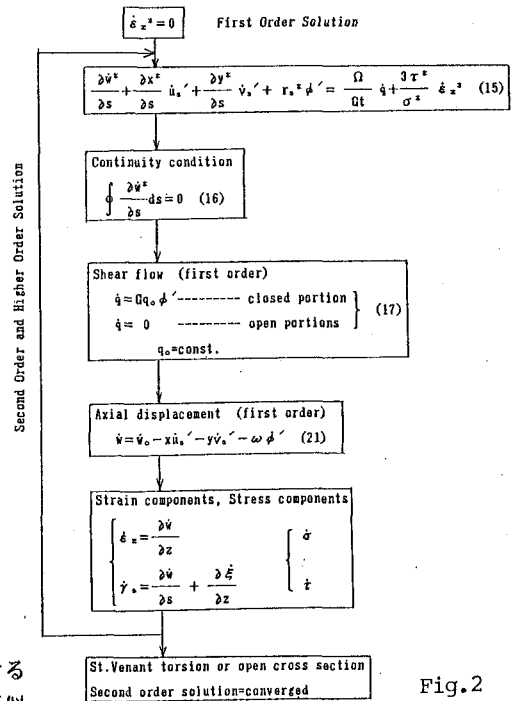


Fig.2

5. 結語

純曲げとねじりを受ける薄肉ばりの場合は二次近似

の変位場が正解となる。しかし一様でない曲げとねじりを受けるはりでは、さらに高次の変位場が存在し得る。特に困難な点はそり関数が部材軸方向へ変化することであり、この場合については今後の検討事項である。

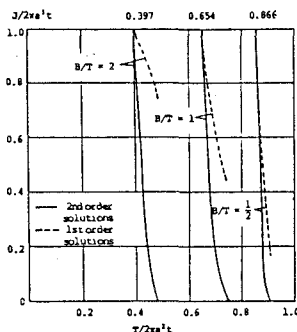


Fig. 4. Variation of torsional rigidity

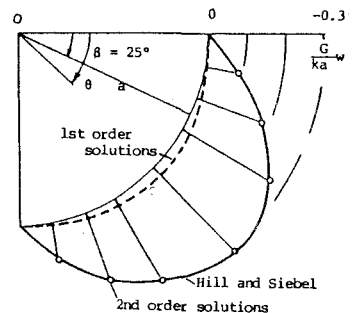


Fig. 5. Warping w at B/T = 1