

差分方程式による周辺単純支持円板の解析

岩手大学 正員 宮本 裕
黒沢尻工業高校 正員 ○安彦 敏郎

本報告は、極座標を用いて表わした板の微分方程式から差分方程式を導き、これを周辺単純支持円板に適用し数値計算を行い、その結果を厳密解と比較検討したものである。

1. 極座標を用いた板の微分方程式の誘導 板の微分方程式は次のようになる。

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right) = \frac{P}{D} \quad \text{----- (1)}$$

また、極座標によるスカラー関数 U のラプラスアンは、次のようになる。

$$\nabla^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} \quad \text{----- (2)}$$

式(2)を用いて式(1)を変形すると、次の式が導かれる。

$$\frac{\partial^4 F}{\partial r^4} + \frac{2}{r} \frac{\partial^3 F}{\partial r^3} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial^4 F}{\partial r^2 \partial \theta^2} - \frac{2}{r^3} \frac{\partial^3 F}{\partial r \partial \theta^2} + \frac{4}{r^4} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^4} \frac{\partial^4 F}{\partial \theta^4} = \frac{P}{D} \quad \text{---- (3)}$$

2. 差分方程式の誘導 式(3)を差分化すると、次の式が導かれる。

$$\frac{1}{\lambda^4} \left\{ \begin{array}{c} +Z_r F_r \\ +Z_\theta F_\theta + Z_n F_n + Z_r F_r \\ Z_s F_s + Z_i F_i + Z_k F_k + Z_l F_l + Z_t F_t \\ +Z_o F_o + Z_m F_m + Z_p F_p \\ +Z_u F_u \end{array} \right\} = \frac{P}{D} \quad \text{---- (4)}$$

ここで、 r 方向の分割幅を λ 、 θ 方向の分割幅を ω 、 $\frac{\lambda}{\omega} = \kappa$ とすると、 F の係数 Z は次のように表わされる。

$$Z_k = 2 \left\{ 3 + \frac{1}{\kappa^2} (\lambda^2 + 4\kappa^2) - \frac{\kappa}{\kappa^4} (4\lambda^2 - 3\kappa^2) \right\} \quad Z_i = - \left\{ 4 \left(1 - \frac{\lambda}{2\kappa} \right) + \frac{1}{\kappa^2} \left(1 + \frac{\lambda}{2\kappa} \right) (\lambda^2 + 4\kappa^2) \right\}$$

$$Z_l = - \left\{ 4 \left(1 + \frac{\lambda}{2\kappa} \right) + \frac{1}{\kappa^2} \left(1 - \frac{\lambda}{2\kappa} \right) (\lambda^2 + 4\kappa^2) \right\} \quad Z_m = Z_n = - \frac{4\kappa^2}{\kappa^2} \left\{ 1 - \frac{1}{\kappa^2} (\lambda^2 - \kappa^2) \right\}$$

$$Z_o = Z_g = \frac{2\kappa^2}{\kappa^2} \left(1 + \frac{\lambda}{2\kappa} \right) \quad Z_p = Z_r = \frac{2\kappa^2}{\kappa^2} \left(1 - \frac{\lambda}{2\kappa} \right) \quad Z_s = 1 - \frac{\lambda}{\kappa} \quad Z_t = 1 + \frac{\lambda}{\kappa} \quad Z_u = Z_v = \frac{\kappa^4}{\kappa^4}$$

同様に、曲げモーメント M 、せん断力 Q 、反力 V についても、極座標による微分方程式を差分化する。

$$M_r = -D \left\{ \begin{array}{c} +Z_n F_n \\ Z_i F_i + Z_k F_k + Z_l F_l \\ +Z_m F_m \end{array} \right\} \quad \text{---- (5)} \quad \text{ここで } Z_k = -\frac{2}{\lambda^2} \left(1 - \nu \frac{\lambda^2}{\kappa^2 \omega^2} \right) \quad Z_i = \frac{1}{\lambda^2} \left(1 - \nu \frac{\lambda}{2\kappa} \right)$$

$$M_\theta = -D \left\{ \begin{array}{c} +Z_n F_n \\ Z_i F_i + Z_k F_k + Z_l F_l \\ +Z_m F_m \end{array} \right\} \quad \text{---- (6)} \quad Z_l = \frac{1}{\lambda^2} \left(1 + \nu \frac{\lambda}{2\kappa} \right) \quad Z_m = Z_n = \nu \frac{1}{\kappa^2 \omega^2}$$

$$M_{ro} = M_{or} = -D(1-\nu) \left\{ \begin{array}{c} Z_g F_g + Z_n F_n + Z_r F_r \\ 0 \quad 0 \quad 0 \\ Z_o F_o + Z_m F_m + Z_p F_p \end{array} \right\} \quad \text{---- (7)} \quad \text{ここで } Z_m = \frac{1}{2\kappa^2 \omega} \quad Z_n = -\frac{1}{2\kappa^2 \omega}$$

$$Q_r = -D \left\{ \begin{array}{c} +Z_g F_g + Z_n F_n + Z_r F_r \\ Z_s F_s + Z_a F_a + Z_k F_k + Z_l F_l + Z_t F_t \\ + Z_o F_o + Z_m F_m + Z_p F_p \end{array} \right\} \quad \text{---(8)}$$

$$Z_s = -\frac{1}{2\lambda^3} \quad Z_k = \frac{1}{2\lambda^3} \quad Z_m = Z_n = -\frac{2}{r_k^3 \omega^2} \quad Z_o = Z_g = -\frac{1}{2r_k^2 \lambda \omega^2} \quad Z_p = Z_r = \frac{1}{2r_k^2 \lambda \omega^2}$$

$$Q_\theta = -D \frac{1}{r} \left\{ \begin{array}{c} +Z_u F_u \\ Z_g F_g + Z_n F_n + Z_r F_r \\ 0 \quad 0 \quad 0 \\ Z_o F_o + Z_m F_m + Z_p F_p \\ +Z_u F_u \end{array} \right\} \quad \text{---(9)}$$

$$\text{ここで } Z_m = \frac{1}{\lambda^2 \omega} \left(1 + \frac{k^2}{r_k^2} \right) \quad Z_n = -\frac{1}{\lambda^2 \omega} \left(1 + \frac{k^2}{r_k^2} \right) \\ Z_o = -\frac{1}{2\lambda^2 \omega} + \frac{1}{4r_k \lambda \omega} \quad Z_p = -\frac{1}{2\lambda^2 \omega} - \frac{1}{4r_k \lambda \omega} \\ Z_r = \frac{1}{2\lambda^2 \omega} - \frac{1}{4r_k \lambda \omega} \quad Z_r = \frac{1}{2\lambda^2 \omega} + \frac{1}{4r_k \lambda \omega} \\ Z_u = -\frac{1}{2\omega^2} \quad Z_v = \frac{1}{2\omega^2}$$

$$V_r = Q_r + \frac{D}{r_k^2 \omega^2} (1-\nu) \left\{ \begin{array}{ccc} \frac{1}{2\lambda} & \frac{1}{r_k} & -\frac{1}{2\lambda} \\ -\frac{1}{\lambda} & -\frac{2}{r_k} & +\frac{1}{\lambda} \\ \frac{1}{2\lambda} & \frac{1}{r_k} & -\frac{1}{2\lambda} \end{array} \right\} \quad \text{---(10)}$$

$$V_\theta = Q_\theta - \frac{D}{r_k \omega} (1-\nu) \left\{ \begin{array}{ccc} \frac{1}{2\lambda} \left(\frac{1}{r_k} + \frac{1}{\lambda} \right) & \frac{1}{r_k^2} - \frac{1}{\lambda^2} & \frac{1}{2\lambda} \left(-\frac{1}{r_k} + \frac{1}{\lambda} \right) \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2\lambda} \left(\frac{1}{r_k} - \frac{1}{\lambda} \right) & \frac{1}{r_k^2} + \frac{1}{\lambda^2} & \frac{1}{2\lambda} \left(\frac{1}{r_k} - \frac{1}{\lambda} \right) \end{array} \right\} \quad \text{---(11)}$$

3. 境界条件の処理および計算法

中央に集中荷重が作用する周辺単純支持円板について計算を行う。この場合、境界条件は次のようになる。

(1). 円周上での変位は0である。(2). 円周より外側に仮定の点を考えた場合、この点の変位は、円周に対して対称の位置にある内側の点の変位と、符号は逆で、絶対値は等しくなる。また、荷重が中央に作用していることとなる。円板の一部の扇形について計算を行う。これらのことから、境界条件処理および対称軸処理を行い、25種類の差分式を誘導する。

図-3のように円板を分割し、各点にこれらの差分式を適用することにより、連立方程式が得られる。しかし中央点では $r_k=0$ となり、上式を適用することができない。そこで、次のような関係を用いる。

$$Q_r = -D \frac{d}{dr} \left(\frac{d^2 F}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dF}{dr} \right) \quad \text{ここで } Q_r = -\frac{P}{2\pi r} \text{ だから}$$

$$-D \frac{d}{dr} \left(\frac{d^2 F}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dF}{dr} \right) = -\frac{P}{2\pi r} \quad \text{---(12)}$$

式(12)を差分化すると、次のようになる。

$$2\pi r \left\{ -\lambda \quad 2\lambda + \frac{\lambda^3}{r^2} \quad \frac{-2\lambda^2}{r} \right\} = \frac{P}{D} \lambda^4 \quad \text{---(13)}$$

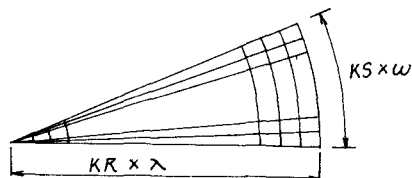


図-3

式(13)を上述の連立方程式に追加することにより、未知数と等しい数の方程式が得られ、この連立方程式を解くことにより、変位 F が求められる。これを式(5)~式(11)に代入し、 M 、 Q 、 V を求める。

4. 数値計算例 図-4の円板について計算を行う。

$KR=20$ 、 $KS=5$ として、101点について差分方程式をたて、計算を行った。

中央点からの位置		$3/4 a$	$1/2 a$	$1/4 a$	中央点
変位	理論式による値(cm)	1.00	1.81	2.38	2.63
	差分法による値(cm)	0.99	1.91	2.64	2.99

$$t = 1 \text{ cm} \quad P = 1000 \text{ kg} \\ a = 100 \text{ cm} \\ \nu = 0.3 \\ E = 2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$$

図-4

実用上十分な程度に一致した。今後、他の境界条件についても考えていきたい。

5. 参考文献 (1) G. Worch : Elastische Scheiben

(2) 川本 隆万 : 応用弾性学, 共立出版, 1968

(3) Timoshenko, S.P. and S. Woinowsky-Krieger : Theory of Plates and Shells, McGraw-Hill, 1959