境界要素法による弾性床上のはりの解析

岩手大学工学部　正会員　○出戸　秀明

岩手大学工学部　正会員　宮本　裕

岩手大学工学部　正会員　岩崎　正二

1．まえがき

弾性床上のはりの解法としては、支配微分方程式を直接積分する方法、有限要素法、差分法などが考えられるが、ここでは、弾性基礎をバネ定数 k をもつバネでモデル化し、バネ定数 k の変化する弾性床上のはりの解法として、はりの静的曲げ問題の基本解を用いた、境界積分方程式による手法を示し、その有効性と汎用性をたしかめている。

2．解析理論

バネ定数 k の変化する弾性床上のはりに分布荷重 $q(x)$ が作用するときの微分方程式は、式(1)で与えられる。

$$EI\frac{d^4 w(x)}{dx^4} + k(x)w(x) = q(x) \qquad \text{—————} \quad (1)$$

また、はりの静的曲げ問題の基本解は 式(2)で定義され、式(3)で表される。

$$EI\frac{d^4 w_o^*(x,y)}{dx^4} = \delta(x-y) \qquad \delta:\text{デルタ関数} \qquad \text{—————} \quad (2)$$

$$\left.\begin{array}{ll} w_o^*(x,y) = (2^3 + r^3 - 3\ell r)/12EI & M_o^*(x,y) = -(r-2\ell)/2 \\ \theta_o^*(x,y) = r(r-2\ell)/4EI\cdot\mathrm{sgn}(x-y) & Q_o^*(x,y) = -1/2\cdot\mathrm{sgn}(x-y) \\ \multicolumn{2}{l}{\text{ただし、}r = |x-y|,\ x>y\ \text{のとき}\ \mathrm{sgn}(x-y)=1,\ x<y\ \text{のとき}\ \mathrm{sgn}(x-y)=-1} \end{array}\right] \quad (3)$$

式(1)の両辺に真直はりの基本解 $w_o^*(x,y)$ をかけスパン ℓ にわたって積分し、$w(x)$ の微係数がとれるまで部分積分を繰り返し、デルタ関数の性質を考慮すれば 式(4)が得られる。

$$w(y) = \Big[Q(x)w_o^*(x,y) - M(x)\theta_o^*(x,y) + \theta(x)M_o^*(x,y) - w(x)Q_o^*(x,y)\Big]_{x=0}^{x=\ell}$$
$$+ \int_0^\ell q(x)w_o^*(x,y)\,dx - \int_0^\ell w(x)k(x)w_o^*(x,y)\,dx \qquad \text{—————} \quad (4)$$

ただし、

$$\theta(x) = \frac{dw(x)}{dx},\quad M(x) = -EI\frac{d^2w(x)}{dx^2},\quad Q(x) = -EI\frac{d^3w(x)}{dx^3},$$

$$\theta_o^*(x,y) = \frac{dw_o^*(x,y)}{dx},\quad M_o^*(x,y) = -EI\frac{d^2w_o^*(x,y)}{dx^2},\quad Q_o^*(x,y) = -EI\frac{d^3w_o^*(x,y)}{dx^3}$$

ここで、バネ定数 k の変化する弾性床上のはりについて基本解が既知とするならば、式(4)及び 式(4)を y について微分した式(4)′ については、右辺最後の積分項は現れず、これら２本の式において、$y=a+\varepsilon$、$y=b-\varepsilon$（ε は微小な正定数）としたときの $\varepsilon\to 0$ の極限を考えることにより得られる４本の方程式より未知量が定まることになるが、ここでは基本解が未知であるため離散化による数値解析をおこなう。

スパン ℓ を n 分割とし、たわみを Gauss の積分公式により近似すると、式(4)右辺最後の積分項は、次のように表される。

$$G_j = C_{j\cdot1}w_1 + C_{j\cdot2}w_2 + C_{j\cdot3}w_3 + \cdots\cdots + C_{j\cdot n+1}w_{n+1} \qquad (\,j=1,2,3,\cdots\cdots,n+1\,)$$

ただし、$w_1 \sim w_{n+1}$ は分割点（境界点も含む）でのたわみ。

これより式(5)は分割点（境界点も含む）j での式として表わされ，次の $n+1$ 本の式が得られる。

$$w_j = A_{j\cdot1}Q(\ell)+A_{j\cdot2}M(\ell)+A_{j\cdot3}\theta(\ell)+A_{j\cdot4}w(\ell)+B_{j\cdot1}Q(0)+B_{j\cdot2}M(0)+B_{j\cdot3}\theta(0)$$
$$+B_{j\cdot4}w(0)+q_j+C_{j\cdot1}w_1+C_{j\cdot2}w_2+C_{j\cdot3}w_3+\cdots\cdots+C_{j\cdot n+1}w_{n+1} \quad (j=1,2,3,\cdots\cdots,n+1)$$

ただし、$A_{j\cdot n}$, $B_{j\cdot n}$ は分割点における式の境界量にかかる基本解の値、q_j は荷重項。

また、$w(0)=w_1$, $w(\ell)=w_{n+1}$ 。

これらn+1本の式に、式(4)をyについて微分した式より導かれる境界における２本の式を加え、マトリックス式に直し整理して 式(5)を得る。

$$[\,G\ ,\ H\,]\{\,w_1, w_2, w_3, \cdots\cdots, w_{n+1}, Q(\ell), M(\ell), \theta(\ell), Q(0), M(0), \theta(0)\,\}^T$$
$$= -\{\,q_1, q_2, q_3, \cdots\cdots\cdots, q_{n+3}\,\}^T \qquad (5)$$

ただし、Gは たわみw_1〜w_{n+1}にかかる係数行列、Hは境界量にかかる係数行列。

式(5)の未知量のうち境界条件より定まる４個の境界量を除けば残りの未知量が得られ、これにより基本解が未知の弾性床上のはりの問題が解けることになる。

3．数 値 解 析 例

数値計算は等分布荷重の作用する単純支持の弾性床上のはりで、k(x)が１次変化する場合（Fig.-1)、２次変化する場合、また階段状に変化する場合について行なった。

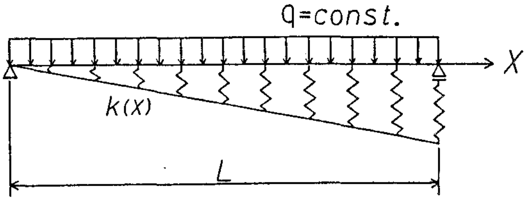

Fig.-1

Table-1 に $k(x)=kx/\ell$ 、スパンℓの分割数 n＝10 としたときの計算結果を示す。

ここで、w_2〜w_{10} は分割点でのたわみを表わし、上段が本手法によるもの、下段(　)内は Newmark's method によるものである。

Table-1　Result of Culculation

w_2	2.77904 (2.78129)	w_7	8.13838 (8.13736)
w_3	5.22753 (5.22369)	w_8	6.91821 (6.91979)
w_4	7.10300 (7.10477)	w_9	5.04147 (5.03743)
w_5	8.25202 (8.25111)	w_{10}	2.66332 (2.66544)
w_6	8.59968 (8.59783)		

$w : 10^{-3}q\ell^4/EI$

4．ま と め

従来より用いられている Newmark's method は、厳密解に良く一致することが知られており、これに比べ上段の、はりの基本解を用いた本手法による結果が十分な精度を持つこと、またバネ定数k が n次変化、あるいは、線形、非線形にかかわらず本手法により数値計算が可能であること、さらに連続桁にも適用できることなどから、弾性床上のはりの問題に汎用性をもつことが明らかとなった。

参 考 文 献

1)田中正隆・田中喜久昭:境界要素法－基礎と応用,丸善;1982
2)出戸秀明・宮本 裕・岩崎正二:境界積分方程式によるはりの解法,岩手大学工学部研究報告第36巻;1983
3)出戸秀明・宮本 裕・岩崎正二:境界積分方程式による変断面はりの解法,岩手大学工学部研究報告第37巻;1984
4)出戸秀明・宮本 裕・岩崎正二:境界要素法による変断面はりの解法について,土木学会第39回講演概要集;1984
5)登坂宣好・角田和彦:積分方程式法による境界値問題の近似解法,日本建築学会論文報告集第329号;1983
6)出戸秀明・宮本 裕・岩崎正二:境界積分方程式によるはりの解法について,第1回境界要素法ｼﾝﾎﾟｼﾞｳﾑ;1984
7)出戸秀明・宮本 裕・岩崎正二:境界要素法による多径間連続変断面はりの解析について,土木学会第40回講演概要集;1985