# 立体骨組の剛性方程式に関する考察

東北大学工学部　学生員　○酒井 達史
東北大学工学部　正員　岩熊 哲夫
東北大学工学部　正員　倉西 茂

## 1. まえがき

立体骨組構造物の有限変位理論の離散化手法として、有限要素法がよく用いられるが、その1つとして「剛体変位除去」と呼ばれる方法がある。この方法は、物体の変位は剛体的な回転と真の変形との重ね合わせであるという極分解の定理に基いており、対象とする問題の変位の大きさに制限がないため、有限変位問題の数値解析上かなり有利なものである。しかし、3次元空間での有限回転は、微小変位理論において扱っているように、線形ベクトル空間上になく、その角度を正しく定義する必要がある。

## 2. 数値解析法の定式化

(a) 3次元空間の有限な回転角.

空間に固定した直交直線座標系まわりの有限な回転角は存在しないが、有限要素法を用いて立体骨組を解析する場合には、微小変位理論で用いられている3つの軸回りの回転角成分を形式的に用いた方が、常に同じ座標系を基準としているために、たいへん扱いやすい。またこの空間に固定された基準となる座標に関する回転角を用いないと、有限変位解析の場合でも、厳密な剛性方程式は得られない。存在しない3つの軸回りの有限回転でも、その増分量や微小量としては存在し、また、仮想仕事式において3つの軸回りのモーメント外力と仕事をする回転としても表わせる。それらは、Euler角で表わした有限回転角 $\alpha, \gamma, \phi$ と次式のような関係にある。

$$\begin{Bmatrix} \delta\theta_x \\ \delta\theta_y \\ \delta\theta_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\cos\gamma\cdot\delta\alpha + \sin\gamma\cos\alpha\cdot\delta\phi \\ \delta\gamma + \sin\alpha\cdot\delta\phi \\ \sin\gamma\cdot\delta\alpha + \cos\gamma\cos\alpha\cdot\delta\phi \end{Bmatrix}$$

(b) 剛性方程式

有限変位の剛性方程式を定式化するために、まず要素そのものの変形を表わす相対変位ベクトル $\underset{\sim}{dl}$ を用いて、それを全体系に変換すると、変位 $\underset{\sim}{d}$ の高次非線形の形で、

$$\underset{\sim}{F} = \underset{\sim}{T}(\underset{\sim}{d})\cdot\underset{\sim}{K}\cdot\underset{\sim}{T}^T(\underset{\sim}{d})\cdot\underset{\sim}{dl}(\underset{\sim}{d})$$

と表わされ、ここに、$\underset{\sim}{F}$ は全体系の接点力ベクトル、$\underset{\sim}{T}(\underset{\sim}{d})$ は有限回転角成分がEuler角で表わされた全体系の接点変位ベクトル $\underset{\sim}{d}$ の関数である座標変換マトリックス、$\underset{\sim}{K}$ は微小変位理論に基いた剛性マトリックスである。この剛性方程式をNewton-Raphson法を用いて解くために、

$$\Delta\underset{\sim}{F} = \Delta\underset{\sim}{T}\,\underset{\sim}{K}\,\underset{\sim}{T}^T\underset{\sim}{dl} + \underset{\sim}{T}\,\underset{\sim}{K}\,\Delta\underset{\sim}{T}^T\underset{\sim}{dl} + \underset{\sim}{T}\,\underset{\sim}{K}\,\underset{\sim}{T}^T\Delta\underset{\sim}{dl} = \underset{\sim}{K_t}\,\Delta\underset{\sim}{d}$$

と全体系の変位増分 $\Delta\underset{\sim}{d}$ と荷重増分 $\Delta\underset{\sim}{F}$ の線形化された増分式を求め、これを用いる。

## 3. 離散化の精度.

この剛性方程式の精度を検証するために、解析解の存在する Elastica 問題との挙動の比較を行なう。Fig. 1 は、細長い片持梁にせん断力を加えた場合であり、剛性方程式に幾何剛性を含む場合も含まない場合も、精度良く挙動を追跡している。Fig. 2 は同様の棒部材に微小な初期不整を与え軸圧縮した場合である。幾何剛性を含む場合は解析解とほとんど一致しているが、含まない場合は座屈点付近で誤

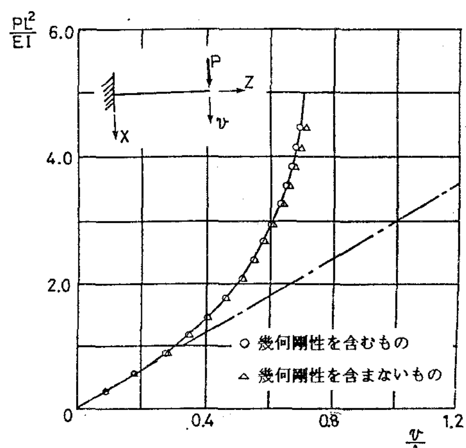


Fig.1

Elasticaと数値解の挙動比較(1).

差が目立つ。これはこの付近でのみ接線剛性マトリックスの性質が良くないからであると予想でき、さらに変形が大きくなると解析解に漸近していく様子がわかる。

## 4、横だおれ座屈

### (a) 座屈前の面内変形の影響

Fig.3. は基準とした断面の強軸回りの断面2次モーメントのみを変化させた仮想断面の座屈荷重を、座屈前の変形を無視した Timoshenko の座屈荷重と比較したものであり、曲げ剛性が小さくなると座屈前の変形の影響により座屈荷重が大きくなっていることがわかる。

### (b) Channel材との挙動比較

I型断面と等価な、つまり断面積および強軸回りの断面2次モーメントの等しいChannel材をモデルとして比較を行なった。Fig.4は載荷点のちがいによる挙動の差を示したもので、それがせん断中心より遠くなるにしたがい、初期変形が大きくなるが、せん断中心載荷ではむしろI型以上の強度を示す。Fig.5は、端部境界条件のちがいによる挙動の差を示したものであり、そり拘束によって座屈荷重が、そり自由の倍近くになるが、逆に横たわみ量も多くなっていることがわかる。

## 5. おわりに

前述のような定式化にて、3次元空間で、軸力、ねじり及び二軸曲げを受ける棒部材が有限変形をおこす挙動を厳密に追跡できる剛性方程式を導くことができた。

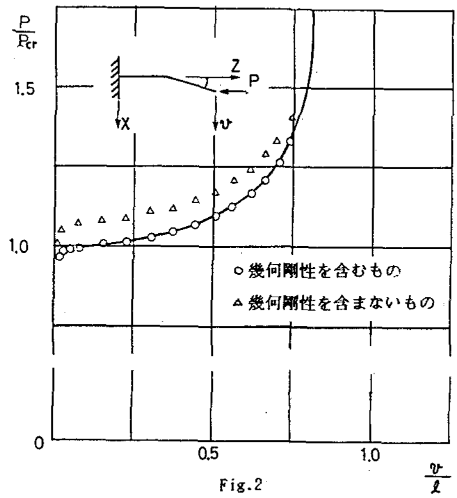

Fig.2
Elastica と数値解の挙動比較(2).

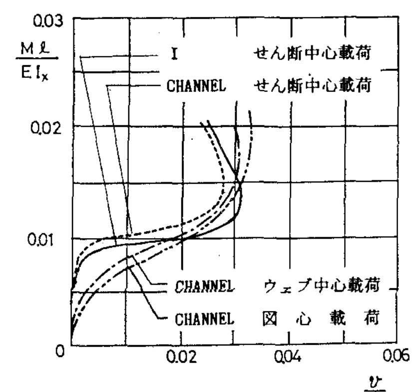

Fig.4
ちがった載荷点による横だおれ座屈挙動の差.

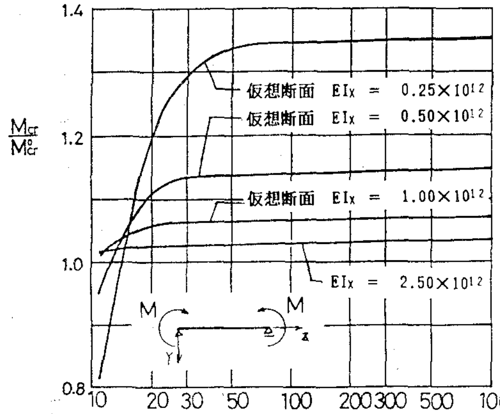

Fig.3
横だおれ座屈荷重と強軸回りの曲げ剛性.

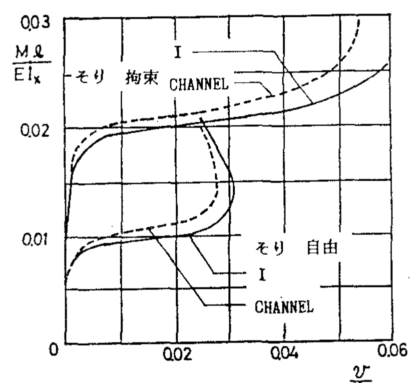

Fig.5
端部でのそり拘束の有無による挙動の差.