各種成分の無限級数展開に基づく高次はり理論

福島工業高等専門学校　正員 ○根岸嘉和
同　学生員　吉沢信之

[1] 緒　言

本報告では，奥行き方向に単位厚さを有し平面応力状態にある　はりの曲げ解析について，変位あるいは応力成分をべき級数展開し，平面弾性論の基礎式の各べき次数ごとの関係式を満足し，上下表面での境界条件を完全に満足した幾つかの高次はり理論を定式化し，それらの理論特性，相互関係，精度特性について検討する．

[2] 理論の定式化

Fig. 1 に示すはりにおける変位および応力を，次のように高さ方向座標に関してべき級数展開する．

$$\begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{Bmatrix} u^{(k)}(x) \\ w^{(k)}(x) \end{Bmatrix} z^{k} \quad \cdots\cdots (1\text{-}1)$$

$$\sigma_x = \sum_{k=0}^{\infty} \sigma_x^{(k)}(x)\, z^{k} \quad \cdots\cdots (1\text{-}2)$$

$$\begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \sigma_z \end{Bmatrix} = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{Bmatrix} \tau_{xz}^{(k)}(x) \\ \sigma_z^{(k)}(x) \end{Bmatrix} z^{k} \quad \cdots\cdots (1\text{-}3)$$

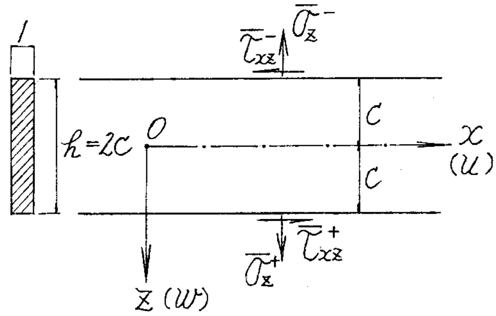

Fig.1 Geometry of beam and surface tractions.

ここで近似的に満足させるべき平面弾性論の基礎式は
（つり合い条件式）

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{x,x} + \tau_{xz,z} &= 0 \\ \tau_{xz,x} + \sigma_{z,z} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (2\text{-}1)$$

（幾何-構成関係式）

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2}\{ u_{,x} + \nu w_{,z} \} \\ \sigma_z &= \frac{E}{1-\nu^2}\{ w_{,z} + \nu u_{,x} \} \\ \tau_{xz} &= G\{ w_{,x} + u_{,z} \} \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (2\text{-}2)$$

あるいは，（応力表現の適合条件式）

$$\frac{1}{E}\{\sigma_x - \nu\sigma_z\}_{,zz} + \frac{1}{E}\{\sigma_z - \nu\sigma_x\}_{,xx} = \frac{1}{G}\tau_{xz,xz} \quad \cdots\cdots (2\text{-}3)$$

などであり，さらに次式の上下表面での境界条件（応力境界の場合を示す）を満足させる．

$$\begin{Bmatrix} \tau_{xz}(z=\pm c) \\ \sigma_z(z=\pm c) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{\tau}_{xz}^{\pm} \\ \bar{\sigma}_z^{\pm} \end{Bmatrix} \quad \cdots\cdots (3\text{-}1)$$

式(1-1)～(1-3)の成分の展開仮定の幾つかを採用し，それらが式(2-1)～(2-3)の基礎式から得られるその各べき次数ごとの関係式と式(3-1)の境界条件式とを満足するようにさせることにより，3種類の高次はり理論を定式化する．

① 変位仮定理論（D_n）

式(1-1)の変位成分のみ仮定し，式(2-2)を用いて応力成分を変位で表わし，これらを式(2-1)と式(3-1)に代入し次式のような変位係数支配方程式を得る．

$$\left.\begin{aligned} u^{(m+2)} &= -\frac{1}{(m+2)(1-\nu)}\left\{(1+\nu)\, w_{,x}^{(m+1)} + \frac{2}{(m+2)} u_{,xx}^{(m)}\right\} \\ w^{(m+2)} &= -\frac{1}{2\,(m+2)}\left\{(1+\nu)\, u_{,x}^{(m+1)} + \frac{(1-\nu)}{(m+1)} w_{,xx}^{(m)}\right\} \end{aligned}\right\}$$

$$(m=0,1,2\cdots\cdots 2n-1) \quad \cdots\cdots (4\text{-}1)$$

$$\left.\begin{aligned} G\sum_{k=0}^{2n}(\pm c)^{k}\left\{(k+1)\,u^{(k+1)} + w_{,x}^{(k)}\right\} &= \bar{\tau}_{xz}^{\pm} \\ \frac{E}{1-\nu^2}\sum_{k=0}^{2n}(\pm c)^{k}\left\{(k+1)\,w^{(k+1)} + u_{,x}^{(k)}\right\} &= \bar{\sigma}_z^{\pm} \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (4\text{-}2)$$

② 混合仮定理論（M_n）

式(1-1)，(1-3)で変位および高さ方向応力成分を仮定し，式(2-1)，$(2\text{-}2)_{2,3}$ の基礎式からこれらの変位係数と応力係数の間の関係式を誘導し，式(3-1)の境界条件と連立させた次式を支配方程式として解く理論である．なお軸方向応力は求められた変位を用い式 $(2\text{-}2)_1$ より決定される．

$$
\left.
\begin{aligned}
\tau_{xz}^{(m+1)} &= -\frac{1}{(m+1)}\left\{ E\,u_{,xx}^{(m)} + \nu\sigma_{z,x}^{(m)} \right\} \\
\sigma_{z}^{(m+1)} &= -\frac{1}{(m+1)}\tau_{xz,x}^{(m)} \\
u^{(m+1)} &= -\frac{1}{(m+1)}\left\{ w_{,x}^{(m)} - \frac{1}{G}\tau_{xz}^{(m)} \right\} \\
w^{(m+1)} &= -\frac{1}{(m+1)}\left\{ \nu u_{,x}^{(m)} - \frac{1-\nu^2}{E}\sigma_{z}^{(m)} \right\}
\end{aligned}
\right\}
\quad (m = 0, 1, 2 \cdots\cdots 2n-1) \qquad \text{(5-1)}
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{2n} (\pm c)^k \tau_{xz}^{(k)} &= \bar{\tau}_{xz}^{\pm} \\
\sum_{k=0}^{2n} (\pm c)^k \sigma_{z}^{(k)} &= \bar{\sigma}_{z}^{\pm}
\end{aligned}
\right\} \qquad \text{(5-2)}
$$

③ 応力仮定理論 (S_n)

式(1-2)，(1-3)により応力のみ仮定し，つり合い式(2-1)および適合条件式(2-3)から得られる応力係数間の関係式と式(3-1)の境界条件とを支配式とする理論である．なおこの理論で変位は応力に従属なものとして基礎式(2-1)の積分により求められる．この理論の支配式の具体形を示せば次のようである．

$$
\left.
\begin{aligned}
\tau_{xz}^{(m+1)} &= -\frac{1}{(m+1)}\sigma_{x,x}^{(m)} \\
\sigma_{z}^{(m+2)} &= -\frac{1}{(m+2)}\tau_{xz}^{(m+1)} = \frac{1}{(m+1)(m+2)}\sigma_{x,xx}^{(m)} \\
&\quad (m = 0, 1, 2 \cdots\cdots 2n-1) \\
(m+1)(m+2)&\left\{\sigma_{x}^{(m+2)} - \nu\sigma_{z}^{(m+2)}\right\} + \left\{\sigma_{z,xx}^{(m)} - \nu\sigma_{x,xx}^{(m)}\right\} \\
&= 2(m+1)(1+\nu)\tau_{xz,x}^{(m+1)} \quad (m = 0, 1, 2 \cdots\cdots 2n-3)
\end{aligned}
\right\} \qquad \text{(6-1)}
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{2n} (\pm c)^k \tau_{xz}^{(k)} &= \bar{\tau}_{xz}^{\pm} \\
\sum_{k=0}^{2n+1} (\pm c)^k \sigma_{z}^{(k)} &= \bar{\sigma}_{z}^{\pm}
\end{aligned}
\right\} \qquad \text{(6-2)}
$$

3 各種理論の特性と相互関係

各理論のn次近似理論における変位，応力成分の次数と独立未知量の数の比較をTable 1に示す．

Table 1 Comparisons of n-th order theories.

n次近似理論	変位の次数 u	変位の次数 w	応力の次数 σ_x	応力の次数 τ_{xz}	応力の次数 σ_z	独立未知量の数
変位仮定	←		$2n+1$		→	$4n+4$
混合仮定	←		$2n$		→	$8n+4$
応力仮定	$2n+1$	$2n+2$	$2n-1$	$2n$	$2n+1$	$6n+3$

これより，各理論の同次の近似理論における個々の力学量の最高次数には多少の差異があることがわかる．これらのうち，変位仮定理論はWang & Dicksonのはり理論[1]を一般化したものに当たるとともに，変位係数間関係式を用い独立未知量として$u^{(0)}, u^{(1)}, w^{(0)}, w^{(1)}$のみを残した形に整理すると，五十嵐らの理論[2]に帰着する．他方，混合仮定理論はVlasovの初期関数法[3]（M.I.F.）と同等の理論式となっている．なおこれらのいずれも，はりの領域内の各点で弾性論の基礎式を，理論の次数に応じたある有限次数までの各べき次数ごとに満足する微小点量理論としての共通の特性をもっており，上下表面での境界条件も完全に満足するため，側端面での境界条件も満足させられる問題に関しては2次元弾性論の級数解法的性格をもっている．

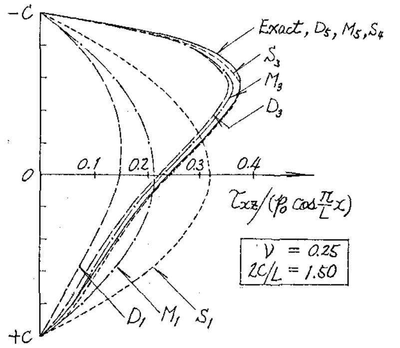

Fig.2 Distributions of τ_{xz} along the hight.

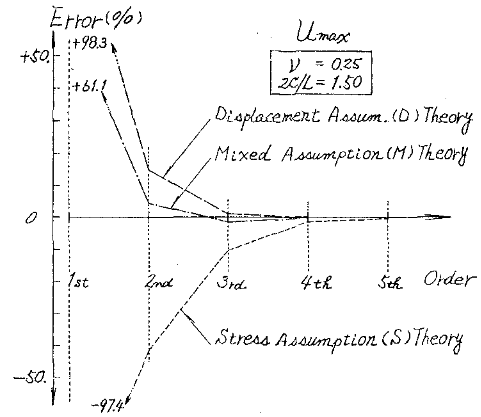

Fig.3 Errors of U_{max} according to various theories.

4 数値計算例

Fig.2，3に上表面に荷重$p = p_0 \sin\frac{\pi}{L}x$を受ける無限ばりにおける応力$\tau_{xz}$の高さ方向分布の解析結果と変位$U_{max}$の解の厳密解[4]への収束状況を示す．これらより各種の理論の解析精度特性を概観できる．

REFERENCES 1) Wang, J.T.S. & Dickson, J.N. : AIAA J., Vol.17, pp.535-537, 1979. 2) Igarashi, S. & Takizawa, E.I. : Ing. Arch., Vol.54, pp.465-475, 1984. 3) Vlasov, V.Z. : Proc. 9th Int. Cong. Appl. Mech., Vol.6, pp.321-330, 1956. 4) Pagano, N.J. : J. Comp. Mat., Vol.3, pp.398-411, 1969.