

1. はじめに

有限要素法を使った連続構造の形状最適化は、目的と制約に応じた節点座標の改訂を行なうものである。ところが、最適化過程において節点座標の移動により形状最適化が停滞したり、要素形状が有限要素解析上好ましくない場合がある。これは、1) 要素面積が不均一となる、2) 要素の形がいびつとなる、ことによる。本論は、1) の要素面積の不均一性を改善するための要素再分割手法を導き、これを最適化過程へ適用した時の効果について検討したものである。

2. 要素再分割手法

要素面積の不均一性を次式により評価し、

$$Z = \sum_{j=1}^{ne} (A_j - A_{ave})^2 \quad (1)$$

ここで A_j : 要素jの面積、 ne : 要素総数

A_{ave} : 要素面積の平均値

各要素面積が平均化しているとの制約のもとに、(1) 式を最小化する移動可能な節点座標 X_i を逐次線形計画法 (SLP) により求める方法をとった。

制約条件は、

$$(1 - \epsilon) A_{ave} \leq A_j \leq (1 + \epsilon) A_{ave} \quad (2)$$

$$0 < \epsilon < 1$$

と考へ、試行回数 k 回目の節点座標 X_i の移動量を $d x_i$ とすると、 $k+1$ 回目の要素面積は

$$A_j^{k+1} = A_j^k + \sum_{i=1}^{nd} \frac{\partial A_j}{\partial X_i} d x_i \quad (3)$$

となる。ここで、 nd は移動可能な節点座標数である。

(3) 式を (2) 式へ代入し、整理すると次式となる。

$$\sum_{i=1}^{nd} \frac{\partial A_j}{\partial X_i} x_i \geq (1 - \epsilon) A_{ave} - A_j^k \quad (4)$$

$$\sum_{i=1}^{nd} \frac{\partial A_j}{\partial X_i} x_i \leq (1 + \epsilon) A_{ave} - A_j^k \quad (5)$$

また、(1) の目的関数 Z^{k+1} は

$$Z^{k+1} = Z^k + \sum_{j=1}^{ne} \sum_{i=1}^{nd} \frac{\partial A_j}{\partial X_i} \{ \sum_{j=1}^{ne} (A_j^k - A_{ave})^2 \} d x_i$$

$$\therefore Z^{k+1} = Z^k + 2 \sum_{j=1}^{nd} \sum_{i=1}^{ne} \left\{ \frac{\partial A_j}{\partial X_i} (A_j - A_{ave}) \right\} d x_i \quad (6)$$

となる。このため、要素面積を平均化するためには (4), (5) の条件のもとで (6) の右边第2項を最小化する $d x_i$ を求めることとなる。

なお、(4)-(6) に現れる $\frac{\partial A_j}{\partial X_i}$ は要素 j を構成する節点番号を k, l, m とすると

$$A_j = (X_l Y_m - X_m Y_l + X_m Y_k - X_k Y_m + X_k Y_l - X_l Y_k) / 2$$

$$\frac{\partial A_j}{\partial X_k} = (Y_l - Y_m) / 2 \quad \frac{\partial A_j}{\partial X_l} = (Y_m - Y_k) / 2$$

$$\frac{\partial A_j}{\partial X_m} = (Y_k - Y_l) / 2 \quad \frac{\partial A_j}{\partial Y_k} = (X_m - X_l) / 2$$

$$\frac{\partial A_j}{\partial Y_l} = (X_k - X_m) / 2 \quad \frac{\partial A_j}{\partial Y_m} = (X_l - X_k) / 2 \quad (7)$$

となる。

3. 要素再分割プログラムと実行例

プログラムのフローチャートを Fig 1 に示す。与えられた要素分割状態から (1)

式の Z を算定し (4), (5) の制約のもとで (6) が最小となるよう線形計画法 (LP) により座標の改善量を計算し、 Z が収束するまで繰り返す方法である。

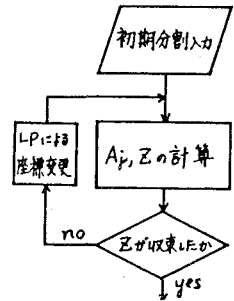


Fig 2 はこのプログラム Fig 1 再分割の流れ図の妥当性を確認するために

行なった実行例である。この再分割のために移動可能とした座標は内部の各節点の Y 座標である。左側は与えられた状態で、右側は 1 回目の試行で得られた状態である。要素面積の平均化が節点座標の移動によって果たされていることがわかる。

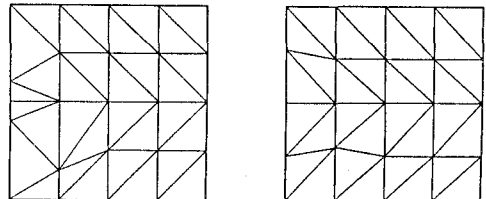


Fig 2 実行例 (左: 初期、右: 試行 1 回目)

4. 形状最適化への適用例

要素面積均一化再分割手法を形状最適化への適用しその効果を検討した。Fig 3 に示すように再分割は各試行で最適化された形状に対して行なう。

Fig 4 に計算モデルと初期分割状態を示す。モデルは左側を固定し右側に荷重を受ける構造である。

最適化は各要素の相当応力 $\bar{\sigma}_i$ が基準とする相当応力 (基準応力 $\bar{\sigma}_0$) に近づくことを目的とし座標変更を行なうものである。この最適化のための移動可能座標は中央の4, 8, ... 23を除く各節点のY座標であり、一方再分割の際使われる移動可能座標は外形を変えることのない2, 4, 7, 9, ..., 22, 24のY座標とした。

Fig 5, 6はそれぞれ試行に伴う全面積 $\sum A_i$, 平均相当応力 $\bar{\sigma}_m$ の変化を示したものである。再分割の効果を調べるため、毎回再分割した場合、5回毎に再分割した場合を再分割しない場合と比較した。これによると、再分割しない時は相当応力の改善が停滞してしまうのに対し、再分割をすると改善が早く行なわれ、同じ改善を得るのに必要な試行回数が1/2から1/3に短縮される効果がある。

Fig 7は最適化過程における要素分割状態を示したもので、上段の再分割をしない時では試行が進むに連れ要素面積の不均一が見られるが、下段の再分割を用いた時は要素面積が均一化され、最適化が円滑に行なわれている。また、下段は上段に比較して有限要素解析あるいは最適化における計算精度が高いと思われる。

5. おわりに

本論で導いた再分割手法を形状最適化過程に取り入れることにより、最適化計算の効率を増大させることが可能となった。しかし、はじめに述べたように面積を均一化させるだけではなく、要素の正三角形化あるいは要素応力に応じた面積配分等が必要とされるため、今後これらをも考慮した手法を検討したいと考えている。

＜参考文献＞ 1) 長谷川 明、連続構造の最適化について、昭和58年度土木学会東北支部技術研究発表会

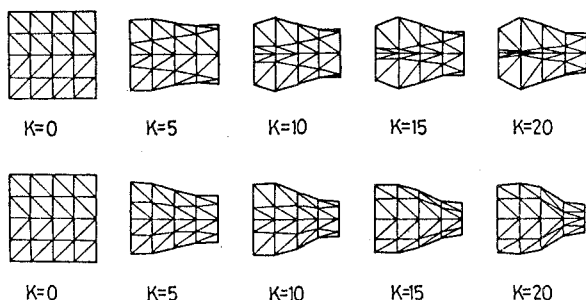


Fig 7 形状と要素分割の変化 (上: 再分割せず、下: 毎回再分割)

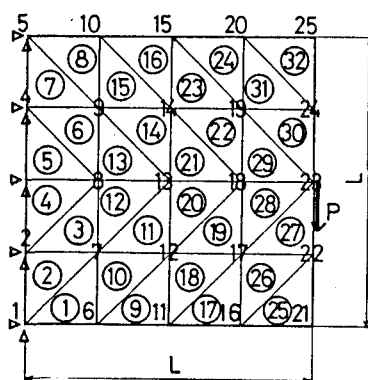


Fig 4 計算モデル

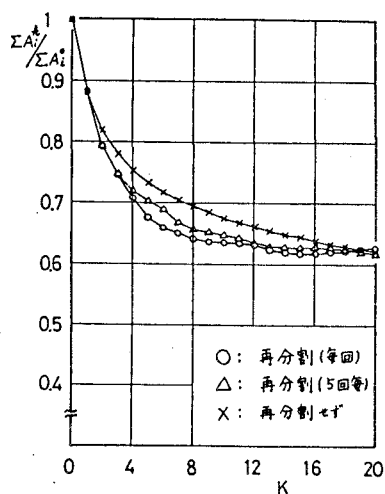


Fig 5 全面積の変化

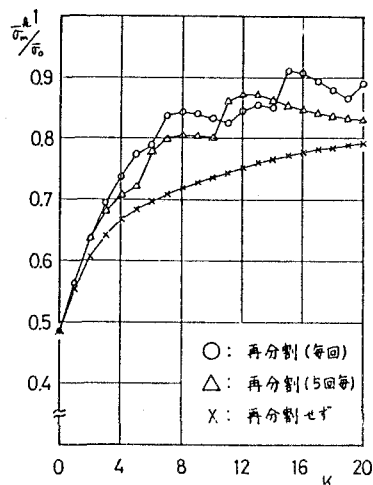


Fig 6 平均相当応力の変化