

緩閉塞における水撃圧の静的応力解析結果に関する考察について

東北学院大学 ○ 山川 秀記 河野 幸夫 菅井 幸仁

1 水撃理論

(1) 岩盤内の水撃波伝播速度

トンネル内の水撃波伝播速度 a は厚肉管の伝播速度の式(1)と固定条件 C (一端固定(2)式)において、肉厚 E を無限化するにより(3)式が得られる。

$$a = \sqrt{\frac{K/P}{1 + (K/E)(D/E)C}} \quad \dots (1)$$

$$(2) C = \frac{1}{1 + 9D} \left\{ (54 - \mu) + 2\% (1 + \mu)(1 + 9D) \right\} \quad \dots (2)$$

$$a = \sqrt{\frac{K/P}{1 + 2(K/E)(1 + \mu)}} \quad \dots (3)$$

ここで D : トンネルの直径 6m K : 水の弾性係数 $2.07 \times 10^8 \text{ kgf/m}^2$ P : 水の密度 101.97 kgf/m^3 E : 岩盤の弾性係数 $5.27 \times 10^8 \text{ kgf/m}^2$ μ : ポアソン比 0.3 の値を(3)式に代入すると岩盤内の水撃波の伝播速度は 1002.16% とする

(2) 水撃波の理論解析

圧カトンネル内の水撃圧の理論解析は一次元非定常流として取扱ひ、オイラーの運動方程式(4)式と連続方程式(5)式とのリニアコンビネーションを取ることで、 C 式は(6)、(7)式となる。特性曲線法にて数値解析をあらう。

$$L_1: \frac{\partial V}{\partial t} V + \frac{\partial V}{\partial x} + g \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{f}{2D} V^2 = 0 \quad \dots (4)$$

$$L_2: \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial t} \right) = 0 \quad \dots (5)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} = V \pm a \quad \dots (6) \quad \pm \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{f}{2D} V |V| \pm \frac{g}{a} V a \quad \dots (7)$$

ここで V : 流速 $\%$ H : 圧力水頭 m f : 摩擦係数 0.02 α : 圧カトンネルの傾斜角 D : 圧カトンネルの直径 6m g : 重力加速度 ds, dt, dH および dV を差分化すると C 式では $ds = S_p - S_L, dt = \Delta t, dV = V_p - V_L, dH = H_p - H_L$ C 式では $ds = S_p - S_R, dt = \Delta t, dV = V_p - V_R, dH = H_p - H_R$ 及び比肩関係 $\frac{\partial V}{\partial x} = (V_R - V_L)/(H_R - H_L) = (H_L - H_R)/(H_R - H_L)$ と(6),(7)式に代入することにより V_L, V_R, H_L, H_R 及び V_p, H_p を得ることができる。上流端境界条件は河川、ダムなどの貯水槽なので水頭 H は時間軸に対して変化しないものとして、下流端境界条件は直線的に閉塞するゲート式の弁として解析を行う。

(3) 圧カトンネルと水撃解析モデル

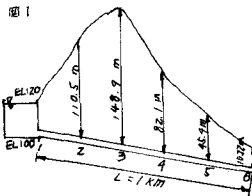


図1は水撃理論解析のモデルで海抜120mの水頭(取水口は100m)から延長1kmの圧カトンネルを通り海抜50mに自然流下式にて放水している場合を考え、ゲート式の弁は下流端に位置し非常時または必要な時に15秒かけて閉塞するものとして計算を行う。延長1kmを5の11-ツにわけ、上流端より断面No1から下流端の断面No6まで6つのノードとし、各断面の地山の高さはトンネル上部より地山の表面まで図のようにとる。

表1は弁の閉塞時間を15秒とした場合の水撃解析結果で各断面における水撃圧の最大値、最小値およびその発生時間を示したものである。以上の水撃圧の時間的な変化または最大値が圧カトンネルの各断面に作用する場合の各ノードの変位および各要素に働く応力などを有限要素法を用いて二次元の静的応力解析を行う。

SECT	MAX.H	TIME	MIN.H	TIME
1	20.0	0	20.0	0
2	43.2	10.396	16.8	16.286
3	66.4	10.526	13.6	15.984
4	89.4	10.328	17.8	16.551
5	112.4	14.101	27.1	16.749
6	133.7	9.997	26.5	16.948

表1

2 静的応力解析

本研究は水撃圧を受ける圧カトンネルを有限要素法による平面ひずみの二次元問題として静的解析を行う。平面ひずみ状態は考えている平面(各断面)に垂直方向(Z 方向)のひずみは存在しないが、垂直方向の応力は存在するものと仮定される。

(1) 解析方法 節点 i, j, k を有する三角形要素を図-2に示す。この要素内の X 方向変位 u 、 Y 方向変位 v を x, y の一次の変位関数として表わせるものとする。従って、

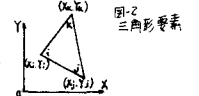
$$u = a_1 + a_2 x + a_3 y \quad v = a_4 + a_5 x + a_6 y \quad \dots (8)$$

ここで $a_1 \sim a_6$ は i, j, k 節点での変位 $u_i, u_j, u_k, v_i, v_j, v_k$ を代入することによって決定することができ、

$$u = \frac{1}{2A} \left\{ (a_i + b_i x + c_i y) u_i + (a_j + b_j x + c_j y) u_j + (a_k + b_k x + c_k y) u_k \right\} \quad \dots (9)$$

ここで A は三角形要素の面積で、また $a_i = X_j Y_k - X_k Y_j$ $b_i = Y_j - Y_k$ $c_i = X_k - X_j$ $\dots$ (10) となり $a_j, a_k, b_j, b_k, c_j, c_k$ は i, j, k の添字を循環することによって求められる。また同様にして、

$$v = \frac{1}{2A} \left\{ (a_i + b_i x + c_i y) v_i + (a_j + b_j x + c_j y) v_j + (a_k + b_k x + c_k y) v_k \right\} \quad \dots (11)$$



$$\text{また平面内ずみは } \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} b_i & 0 & b_j & 0 & b_k & 0 \\ 0 & c_i & 0 & c_j & 0 & c_k \\ c_i b_i & c_j b_j & c_k b_k \end{bmatrix} \{d\} = [B] \{d\} \dots (12) \quad \text{ここで } \{d\} = [u_i \ v_i \ u_j \ v_j \ u_k \ v_k]^T \text{ であり、(12)式の } \varepsilon_x$$

$\varepsilon_y, \gamma_{xy}$ は x, y の関数になり、(11)より、三角形

要素内の任意の点で一定となる。三角形要素を非常に小さくと、たとき、その内部では一定すみの状態になることは明らかであるから三角形要素はこの条件を既に満たしている。

(2) 応力-ひずみマトリックス

$$7 \times 7 \text{ の法則より次式が成り立つ } \varepsilon_x = \frac{1}{E} \{ \sigma_x - \nu (\sigma_y + \sigma_z) \} \dots (13) \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E} \{ \sigma_y - \nu (\sigma_x + \sigma_z) \} \dots (14) \quad \text{また定義より } \sigma_z = (\sigma_x + \sigma_y) \nu \dots (15)$$

$$(15) \text{式を (13)(14)式に代入し、} \sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy} \text{ を求めると、} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \nu(1-\nu) & 0 \\ \nu(1-\nu) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-2\nu)/2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = [D] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \dots (16) \quad \text{となる。}$$

(3) 剛性マトリックス

三角形要素の内部仮想仕事 δW_i は仮想ひずみと応力を掛け要素全体について積分することにより求めらるから次式のようになる。

$$\delta W_i = \int_V \{ \delta \varepsilon_x \ \delta \varepsilon_y \ \delta \gamma_{xy} \} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} dV \dots (17) \quad \text{ここで } V \text{ は三角形要素の体積 } \delta \varepsilon_x, \delta \varepsilon_y, \delta \gamma_{xy} \text{ は}$$

仮想ひずみを表わす式で与えらる。 $\begin{Bmatrix} \delta \varepsilon_x \\ \delta \varepsilon_y \\ \delta \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = [B] \{ \delta d \} \dots (18) \quad \text{ここで } \{ \delta d \} = [\delta u_i \ \delta v_i \ \delta u_j \ \delta v_j \ \delta u_k \ \delta v_k]^T$ 従って内部仮想仕事の積分は $[B], [D]$ が定数となることから次のように整理せらる。

$$\delta W_i = \int_V \{ \delta d \}^T [B]^T [D] [B] \{ d \} dV = A t \{ \delta d \}^T [B]^T [D] [B] \{ d \} \dots (19) \quad \text{ここで } t \text{ は三角形要素の厚さであるが、}$$

実際数値解析するときは単位厚さとするので $t=1$ にする。外部仮想仕事は仮想変位と外力を掛けることにより求めらる次式のようになる $\delta W_o = \{ \delta u_i \ \delta v_i \ \delta u_j \ \delta v_j \ \delta u_k \ \delta v_k \} \{ f \} \dots (20)$

内部仮想仕事と外部仮想仕事は等しいことから (19)(20) 式を等置し整理することにより

$$\{ f \} = A t [B]^T [D] [B] \{ d \} = [K] \{ d \} \dots (21) \quad \text{となる。ここで } [K] \text{ は剛性マトリックスとなる。}$$

節点番号のつけ方は統一的に行うためとしこの節点番号により各要素について求めた (20) 式を全要素について重ね合わせていくことにより求めようとしている系に関する力と変位の方程式が得らる。次にこの求めた方程式に境界条件を入れた。この方程式を解くと、未知節点変位と未知反力が求まる。

(4) 応力解析結果

弁閉塞 15 秒における最大水撃圧 13.37 kg/cm²、発生時間 9.997 秒を使用し断面 6 における応力解析結果を次に示す。

図 3 は各節点の U, V のいわゆる X 方向の変位と Y 方向の変位を示している。図からわかるように最大変位量は 1.508 mm で節点 7 に起きている。図 4 は各要素の σ_x, σ_y のいわゆる X 方向の応力と Y 方向の応力とそれにせん断力 τ_{xy} を示している。 σ_x の最大値は 13.15 kg/cm² で要素 6 番に σ_y の最大値は 12.31 kg/cm² で要素 56 番にせん断力の最大値は 11.63 kg/cm² で要素 86 番に発生している。

図 5 は各要素における S_1, S_2 のいわゆる最大主応力と最小主応力を示し θ は X 軸よりの角度を示している。図のように S_1 の最大値は 17.65 kg/cm² で要素 66 番に、 S_2 の最小値は -11.92 kg/cm² で要素 111 番に起きている。

3. 結論

特性曲線法を使用して Z - t に関する水撃圧解析と有限要素法を使用して X - Y 断面の二次元的応力解析と統合することにより、現実の現象に近いいわゆる X - Y - Z - t に関する解析を行うことが可能となり時間を変えることにより四次元の考察が可能となった。使用した解析モデルは次の様な結果が得た。弁閉塞 15 秒における最大水撃圧 13.37 kg/cm² は 9.997 秒にトンネルの断面 6 に発生しその時の断面の最大主応力は 17.65 kg/cm² で要素 66 番に発生し最大変位 1.508 mm は節点 7 番に発生した。

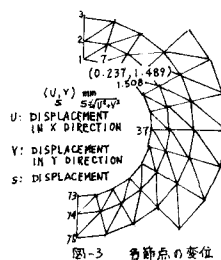


図-3 各節点の変位

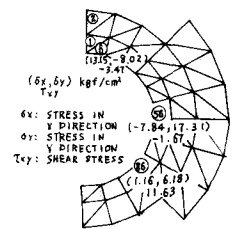


図-4 各要素の応力とせん断力

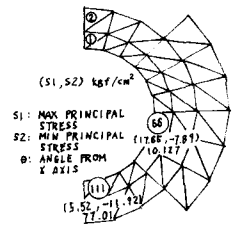


図-5 各要素における主応力