

1) -7°. フロップ法による長波計算の誤差

東北大学大学院 学生員 ○ 今村文考  
 東北大学工学部 正会員 後藤智明  
 東北大学工学部 正会員 首藤伸夫

1. はじめに

近年、津波や高潮の挙動を知るために数値実験が有効であることが認識されるようになってきた。しかし、この数値実験の誤差に関する十分な検討はなされてはいない。

一般に、数値実験の誤差は、支配方程式および初期値・境界値が正しいものとする、丸め誤差と打ち切り誤差に分けられる。丸め誤差は計算機の有限精度に起因するもので、計算の有効桁数を十分多くとる場合にはあまり問題がないことが知られている。一方、打ち切り誤差は使用スキーム特有の散逸あるいは分散効果として現われ、必ずしもその効果が真解と比べて小さいとは限らない。従って、打ち切り誤差には注意を有する。本研究では、線形長波の式を1-7° フロップ差分で計算する場合の打ち切り誤差を検討する。

2. 擬似微分方程式

水平床上、1次元伝播の線形長波の式

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial M}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial M}{\partial t} + C^2 \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0, \quad C = \sqrt{gR} \quad (1)$$

を用いた計算を考える。ここで、 $\eta$  は水位、 $M$  は縦流量、 $R$  は静水深、 $g$  は重力加速度である。式(1)を1-7° フロップ差分にすると、

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\Delta x} \left[ \eta_{j+\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} - \eta_{j+\frac{1}{2}}^{k-\frac{1}{2}} \right] + \frac{1}{\Delta x} \left[ M_{j+1}^k - M_j^k \right] &= 0 \\ \frac{1}{\Delta x} \left[ M_{j+1}^{k+1} - M_j^k \right] + \frac{C^2}{\Delta x} \left[ \eta_{j+\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} - \eta_{j-\frac{1}{2}}^{k-\frac{1}{2}} \right] &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

となる。ここで、 $(\Delta x, \Delta t)$  および  $(j, k)$  はそれぞれ、 $x$ 、 $t$  軸方向の差分格子間隔、格子番号を表す。式(1)と(2)の差を考える。式(2)の1項は、

$$\frac{1}{\Delta x} \left[ \eta_{j+\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} - \eta_{j+\frac{1}{2}}^{k-\frac{1}{2}} \right] = \frac{\partial \eta}{\partial x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} \left( \frac{\Delta x}{2} \right)^{2n} \frac{\partial^{2n+1} \eta}{\partial x^{2n+1}}$$

であり、他の項についても同様に書き換えると、式(2)の擬似微分方程式として次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial M}{\partial x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} \left( \frac{\Delta x}{2} \right)^{2n} \frac{\partial^{2n+1} \eta}{\partial x^{2n+1}} + \left( \frac{\Delta x}{2} \right)^{2n} \frac{\partial^{2n+1} M}{\partial x^{2n+1}} &= 0 \\ \frac{\partial M}{\partial t} + C^2 \frac{\partial \eta}{\partial x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} \left( \frac{\Delta x}{2} \right)^{2n} \frac{\partial^{2n+1} M}{\partial x^{2n+1}} + C^2 \left( \frac{\Delta x}{2} \right)^{2n} \frac{\partial^{2n+1} \eta}{\partial x^{2n+1}} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

式(1)を差分近似することによっておこる項の分だけ差が生じる。この項から打ち切り誤差が発生する。

式(3)から $M$ を消去すると

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} - C^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} - C^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n+1)!} \left( \frac{\Delta x}{2} \right)^{2n} \left[ 1 - \left( C \frac{\Delta x}{2} \right)^{2n} \right] \frac{\partial^{2n+2} \eta}{\partial x^{2n+2}} = 0 \quad (4)$$

を得る。式(1)から $M$ を消去した波動方程式とは、やはりおこる項の分だけ異なる。従って、式(4)の解の性質を調べることにより1-7° フロップ差分の打ち切り誤差を評価できる。

今、 $t=0$  で  $\eta(x,0) = \varphi(x)$ 、 $\partial \eta / \partial t = 0$  である式(4)の初期値問題を考える。又方向に正の進行波だけと考えると解は、

$$\eta(x,t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}(k) e^{ik(x-wt)} dk \quad (5)$$

で与えられる。ここで、

$$w^2(k) = C^2 \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2C-1^n}{(2n+1)!} \left( \frac{k\Delta x}{2} \right)^{2n} \left\{ 1 - \left( C \frac{\Delta x}{2} \right)^{2n} \right\} \right]$$

$$\hat{\varphi}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{-ikx} dx$$

である。解はフーリエ変換により分解された各波数成分の合成で表わされ、さらに各成分波は  $w(k)$  となる波数に関する位相速度で伝播するといった分散現象を呈する。この分散現象は、計算格子間隔に比例して大きくなる数値的なもので物理的なものと性質を異にしたものである。

式(5)の積分を解析的に扱うことは難しい。近似解法として停留点法・鞍部点法が考えられるが、これらの方法では十分速くまで伝播した波の定性的なものしか分らない。そこで、式(5)をそのまま数値計算する方法を用いる。

### 3. 計算結果

初期波形  $\varphi(x)$  として、図-1に示す4種のものの中から孤立波を選んだこととした。高波数成分を含む波の方が、分散効果が顕著であろうと予測される。

図-2に擬似微分方程式の解式(5)とリープ・フロッグ法を用いた式(2)の計算結果の比較を示す。実線が式(5)であり、白丸印が式(2)の計算結果である。図中の記号Lは代表的な波長(孤立波の95%体積)を表わす。両者は非常に良好な一致を示し、数値計算の打ち切り誤差は擬似微分方程式の解を数値計算することで評価しうるということがわかる。また  $w(k)$  の形からも導かれるが、 $\Delta x/L$  が大きい程分散効果は大きく、波高減衰も顕著であることもわかる。

図-3は  $\Delta x/L$  および  $C \cdot \Delta t / \Delta x$  を変えた場合の波高減衰について調べたものである。 $C \cdot \Delta t / \Delta x$  に対する減衰率の変化は小さく、主として  $\Delta x/L$  に依存することがわかる。

最後に、現実問題の例として日本海中部地震津波をとり上げる。初期波形として相田のモデル<sup>1)</sup>の代表的な波形を用い、一次元問題としたときの擬似微分方程式の解を図-4に示す。横軸は初期波形の先端を原点とした時の伝播距離を示す。図中の実線、破線、一点鎖線はそれぞれ  $\Delta x = 1 \text{ km}, 2 \text{ km}, 5 \text{ km}$  とした場合の解である。5 km 格子間隔では数値分散性が大きく、波高を過小評価していることが図より判断できる。

### 4. 結言

リープ・フロッグ法による打ち切り誤差は、数値分散を生じさせる。これを評価する方法として、擬似微分方程式のフーリエによる解法が有効である。打ち切り誤差は主として空間格子間隔  $\Delta x$  に関係するが、最適な格子間隔は初期波形のフーリエ・スペクトルとの兼ねあいを決めなければならない。

本研究の一部は文部省科学研究費によって行なった。

### 参考文献

1) 相田勇：1983年日本海中部地震津波の波源数値モデル。地震研究所彙報 Vol. 59, 1984

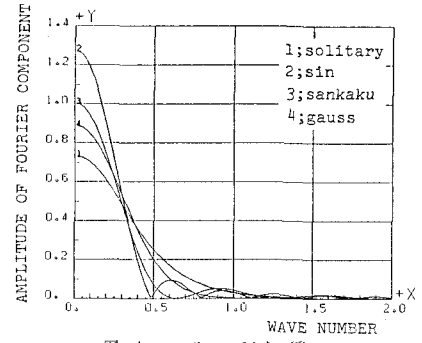


図-1 フーリエスペクトル図

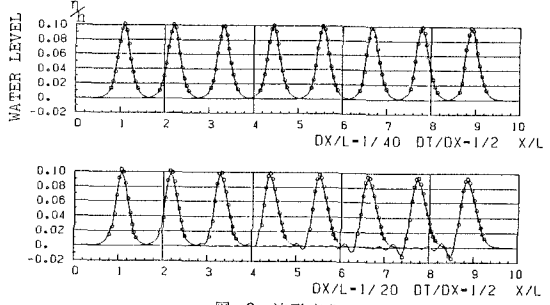


図-2 波形変化図

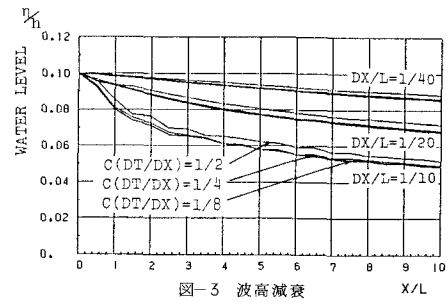


図-3 波高減衰

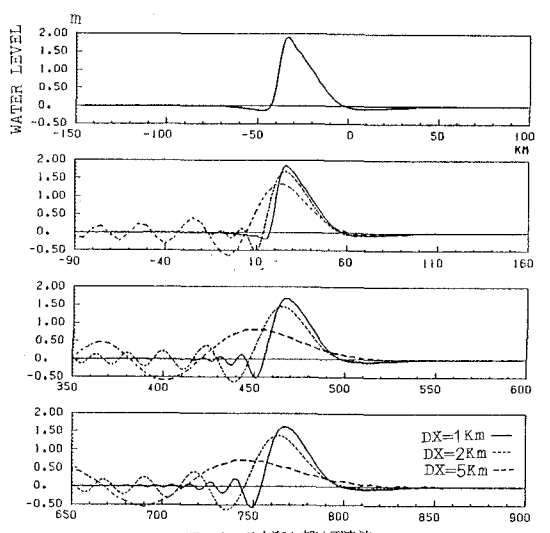


図-4 日本海中部地震津波