

東北大学大学院 学生員 ○ 藤間功司
東北大学工学部 正会員 後藤智明
東北大学工学部 正会員 首藤伸夫

1. 緒言

著者らは既に、MAC法の数値計算結果を用いて非線形分散波式の運動方程式の精度を検討し、移流項・分散項がともに過小評価であり、移流項より分散項の過小評価量の方が大きいという結論を得ている。またソリトン分裂の直接の原因は波形の前傾であるという考察から、非線形分散波式を用いた数値計算でソリトン分裂が実際より早く起こる原因は、非線形分散波式の分散項が過小であるために波形前傾が実際より大きく起こることであると結論した。本研究は非線形分散波式の精度に関し、数値計算に依らず、Peregrineの行ったものと同種の振動をさらに進め高次近似の方程式を導くことにより理論的な検討を加えたものである。

2. 高次近似式の導出及び従来の式との比較

簡単のため水平床土において議論する。

鉛直方向に積分された基本方程式から、アーセル数 ~ 1 の仮定のもとに波高水深比に対応する微小なパラメタ ϵ によって展開する。 $O(\epsilon^0)$ で静水圧、 $O(\epsilon^1)$ で線形長波の式、 $O(\epsilon^2)$ で従来の非線形分散波式を得る。さらに振動を進めれば高次近似式が得られる。ここで用いた振動法は、水平方向流速 u を

$$u = \bar{u} + \epsilon u' = \bar{u} + \epsilon u_1 + \epsilon^2 u_2 + \dots \quad (2)$$

と断面平均流速 $\bar{u}$ のまわりで展開する点でPeregrineの振動と多少異なるが、少なくとも $O(\epsilon^3)$ までは同一の結果を得ることを確かめてある。高次近似式も $O(\epsilon^4)$ まで記す。

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{aligned} \epsilon \frac{\partial \eta}{\partial t} + \epsilon \frac{\partial}{\partial x} [(h + \epsilon \eta) \bar{u}] &= 0 \quad (1) \\ \epsilon \frac{\partial}{\partial t} [(h + \epsilon \eta) \bar{u}] + \epsilon^2 \frac{\partial}{\partial x} [(h + \epsilon \eta) \bar{u}^2] \\ &+ \epsilon^4 \frac{h^5}{45} \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} \right)^2 \right] + \epsilon g (h + \epsilon \eta) \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ &= \epsilon^2 \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{3} (h^3 + \epsilon 3 h^2 \eta + \epsilon^2 3 h \eta^2) \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t \partial x} \right. \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ \epsilon \frac{h^5}{45} \frac{\partial^4 \bar{u}}{\partial t \partial x^3} + \epsilon \frac{1}{3} (h^3 + \epsilon 3 h^2 \eta) \left[\bar{u} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} - \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right)^2 \right] \\ &+ \epsilon^2 \frac{2}{945} h^7 \frac{\partial^4 \bar{u}}{\partial t \partial x^5} + \epsilon^2 \frac{h^4}{9} \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} \left[\eta \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} \right] \\ &+ \epsilon^2 \frac{h^5}{45} \left[\bar{u} \frac{\partial^4 \bar{u}}{\partial x^4} - 2 \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} \right)^2 + \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial x^3} \right] \quad (2) \end{aligned}$$

また、正方向の進行波を仮定すれば式(1)(2)から $\bar{u}$ が消去でき、式(3)を得る。

$$\begin{aligned} \epsilon \frac{\partial \eta}{\partial t} + \epsilon \sqrt{gh} \left\{ 1 + \epsilon \frac{3}{2} \frac{\eta}{h} - \epsilon^2 \frac{3}{8} \left(\frac{\eta}{h} \right)^2 + \epsilon^3 \frac{3}{16} \left(\frac{\eta}{h} \right)^3 \right\} \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ + \epsilon^2 \frac{h^2}{8} \sqrt{gh} \left\{ 1 + \epsilon \frac{5}{2} \frac{\eta}{h} + \epsilon^2 \frac{15}{8} \left(\frac{\eta}{h} \right)^2 \right\} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \\ + \epsilon^3 \frac{19}{360} h^4 \sqrt{gh} \left\{ 1 + \epsilon \frac{9}{2} \frac{\eta}{h} \right\} \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} \\ + \epsilon^3 \frac{23}{24} h \sqrt{gh} \left\{ 1 + \epsilon \frac{3}{2} \frac{\eta}{h} \right\} \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \\ + \epsilon^4 \sqrt{gh} \left\{ \frac{19}{32} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^3 + \frac{317}{288} h^3 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} \right. \\ \left. + \frac{1079}{1440} h^3 \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{55}{3024} h^4 \frac{\partial^4 \eta}{\partial x^4} \right\} = 0 \quad (3) \end{aligned}$$

これらの式の近似の精度を確認するために上述のMAC法の計算結果を用いて各項の評価を行った結果が図1である。ただし、 $O(\epsilon^4)$ は相当複雑なので $O(\epsilon^3)$ ま

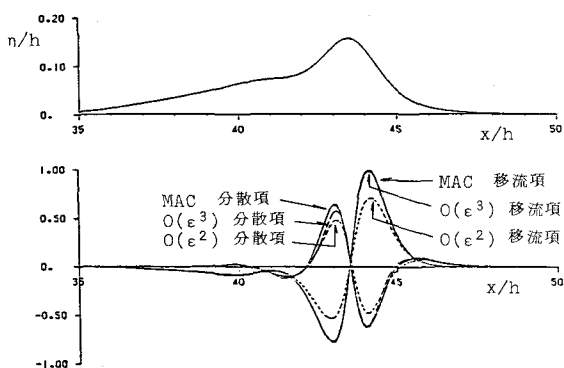


図1 高次近似式の精度

でにとりまとめた。上段は波形である。下段が精度の検討で、実線がMAC法の結果、点線が $O(\epsilon^2)$ までの評価、破線が $O(\epsilon^3)$ までの評価である。 $O(\epsilon^2)$ までの評価では移流項で約30%、分散項で約25%の過小評価であり、 $O(\epsilon^3)$ では移流項は約2%、分散項は波頂前面で約2%、波頂背後で約10%の過小評価となっている。 $O(\epsilon^2)$ の分散項の精度が波頂前後でかなり異なる原因は不明であるが、この結果から、 $O(\epsilon^3)$ の式を用いて $O(\epsilon^2)$ の非線形分散波式の精度を検討する事は妥当であると思われる。なお、津波や高潮の数値計算では移流項として式(2)の $O(\epsilon^3)$ のものを使うのが一般的であるので、緒言で述べた様に分散項の過小評価量の方が大きくなる。

次に式(3)を用いて $O(\epsilon^3)$ の式から見た $O(\epsilon^2)$ の非線形分散波式の性質を調べたものを図2である。(a) - (c)の波形は $\eta = H \operatorname{sech}^2 \sqrt{3H/4h^3} x$ でそれぞれ $H/h = 0.1, 0.3, 0.5$ である。上段は波形、中段 $O(\epsilon^2)$ の式(KdVの式)と $O(\epsilon^3)$ の式の移流項・分散項の比較である。線形項の最大値で規格化して書いてある。実線は線形項、 $-$ が $O(\epsilon^2)$ の移流項・分散項、 $\cdots$ が $O(\epsilon^3)$ の移流項・分散項を表す。下段は $O(\epsilon^3)$ の式の各項の比較であり、次の様な記号に対応している。また、 $O(\epsilon^2)$ の移流項の最大値で規格化している。

移流項	$-$	$\frac{3}{8} \sqrt{H} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}$	$(O(\epsilon^2))$
	$\cdots$	$-\frac{3}{8} \sqrt{H} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial \eta}{\partial x}$	$(O(\epsilon^3))$
分散項	$-$	$\frac{h^2}{8} \sqrt{H} \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3}$	$(O(\epsilon^2))$
	$-$	$\frac{5}{2} h^2 \sqrt{H} \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}$	$(O(\epsilon^3))$
	$-$	$\frac{19}{360} h^4 \sqrt{H} \frac{\partial^5 \eta}{\partial x^5}$	(")
	$-$	$\frac{23}{24} h \sqrt{H} \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3}$	(")

従って、中段の図から $O(\epsilon^2)$ の非線形分散波式の誤差は H/h とともに大きくなり、(c)の場合には移流項は約10%の過大評価、分散項は約15%の過小評価である。この結果から $O(\epsilon^3)$ の非線形分散波式を用いると実際より波形前傾が大きくなることが分る。これは緒言で述べた数値計算による結論と一致している。

3. 結言

高次近似式から見た $O(\epsilon^3)$ の非線形分散波式の精度を sech^2 波を例として調べ、 $O(\epsilon^2)$ の非線形分散波式は波形前傾が大きくなる傾向にあることが分った。

4. 参考文献

- 1) 藤間ら, 第31回海講, pp.93~97, 1984.
- 2) Peregrine, J.F.M., vol.27, part 4, pp.815~827, 1967.

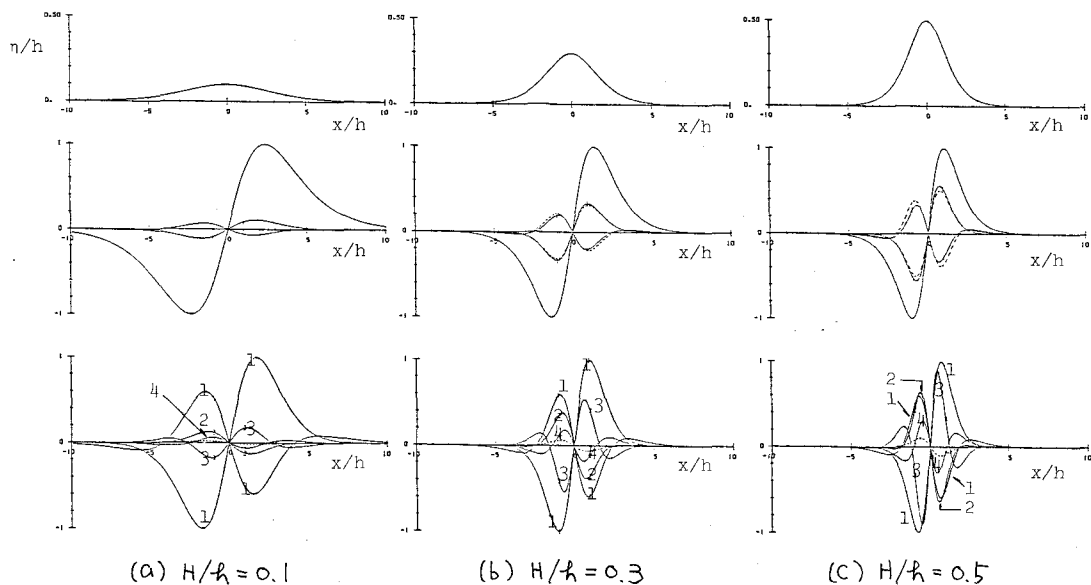


図2 非線形分散波式の精度