一様流を伴うＳｔｏｋｅｓ波の四次近似解について

岩手大学　学生員　○　竹内教浩
正　員　　堺　茂樹

1　はじめに

Stokes 波の近似解としては、波速の第一定義ではSkjelbreia & Hendricksonの解、波速の第二定義では、土屋・山口の解が有名である。特に波速に関して、前者は四次近似解、後者は二次近似解まで求めている。著者等は、一様流を伴う場合の近似解を四次近似まで求めたが、波速に関しては二次近似解までしか求めていなかった。そこで本研究では、一様流を伴う場合のStokes波の波速を、波速の第一・第二定義に基づき四次近似まで誘導し、従来の結果と比較する。

2　一様流を伴うStokes 波の四次近似解

速度ポテンシャルをϕ、波形をζ、水深をh、重力加速度をgとすると、図−1に示す座標系では以下のような基礎方程式が得られる。

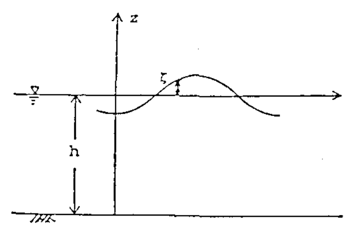
$$\nabla^2\phi=0$$

$$\phi_t+gz+\frac{1}{2}(\nabla\phi)^2\Big|_{z=\zeta}=B$$

$$\phi_z-\phi_x\zeta_x-\zeta_t\Big|_{z=\zeta}=0$$

$$\phi_z\Big|_{z=-h}=0$$

−−−−−−−−−−−−−−−−−−（1）


図−1　座　標　系

定常な一様流をUとして、土屋・山口にならい、ϕ、ζ、波速Cを以下のように仮定する。

$$\phi=U\cdot x+(c-U)\,[\lambda^2A_{02}+\lambda^4A_{04}]\cdot x$$

$$\frac{(c-U)}{k}\,[(\lambda A_{11}+\lambda^3A_{13})\cosh k(h+z)\sin\theta+(\lambda^2A_{22}+\lambda^4A_{24})\cosh 2k(h+z)\sin 2\theta$$

$$+\lambda^3A_{33}\cosh 3k(h+z)\sin 3\theta+\lambda^4A_{44}\cosh 4k(h+z)\sin 4\theta]$$

$$\zeta=\frac{1}{k}[\lambda f_{11}\cos\theta+(\lambda^2f_{22}+\lambda^4f_{24})\cos 2\theta+\lambda^3f_{33}\cos 3\theta+\lambda^4f_{44}\cos 4\theta]$$

$$C=C_0+\lambda C_1+\lambda^2C_2+\lambda^3C_3+\lambda^4C_4$$

ここで、$k=2\pi/L$、L：波長、$\lambda=ka$、$\theta=k(x-ct)$　−−−−−−−−−−−−（2）

式（2）を式（1）に代入すると、ϕ、ζは、土屋・山口の求めた係数と同じ形となる。また波速Cは以下のようになる。

$$C=c_0+(c_0-U)\,\lambda^2\left[A_{02}+\frac{1}{16}\,\frac{8\cosh^4kh-8\cosh^2kh+9}{\sinh^4kh}\right]$$

$$+(c_0-U)\,\lambda^4\Big[\frac{1}{2}A_{04}+A_{02}^2+\frac{1}{16}\,\frac{8\cosh^4kh-8\cosh^2kh+9}{\sinh^4kh}A_{02}$$

$$+\frac{1}{1024}\,\frac{1}{\sinh^{10}kh}(512\cosh^{10}kh-192\cosh^3kh-1200\cosh^6kh$$

$$+448\cosh^4kh+498\cosh^2kh+15)\Big]$$

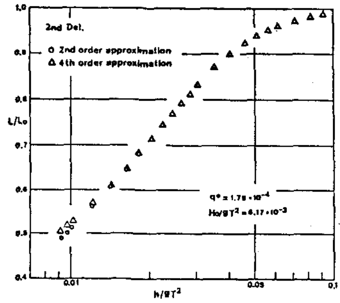
−−−−−−−−−−−−（3）

3　Skjelbreia & Hendricksonの波速の四次近似解との比較

Skjelbreia & Hendricksonによれば、波速の四次近似解は以下のようになる。

$$C^2 = C_0^2\,(1+\lambda^2 C_1+\lambda^4 C_2)$$

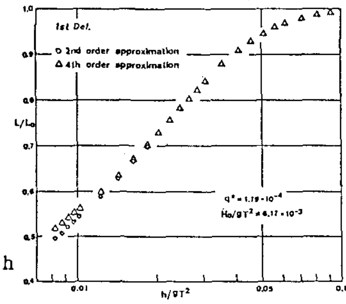
$$C_2 = \frac{1}{512\sinh^{10} kh\,(6\cosh^2 kh-1)} \times (3840\cosh^{12} kh - 4096\cosh^{10} kh + 2592\cosh^8 kh - 1008\cosh^6 kh + 5944\cosh^4 kh - 1830\cosh^2 kh + 147) \qquad \text{----------}\ (4)$$



図－3

本研究では、式（3）において$A_{e2}=A_{e4}=0$とすると、波速の第一定義による波速の四次近似解が求められ、以下のようになる。

$$(c-U)^2 = (c-U)^2\left[1+\lambda^2\left(\frac{1}{8}\,\frac{8\cosh^4 kh-8\cosh^2 kh+9}{\sinh^4 kh}\right) + \lambda^4\left\{\frac{1}{512}\,\frac{1}{\sinh^{10} kh}\,(640\cosh^{10} kh-576\cosh^8 kh - 528\cosh^6 kh-256\cosh^4 kh + 948\cosh^2 kh-147)\right\}\right] \qquad \text{----------}\ (5)$$

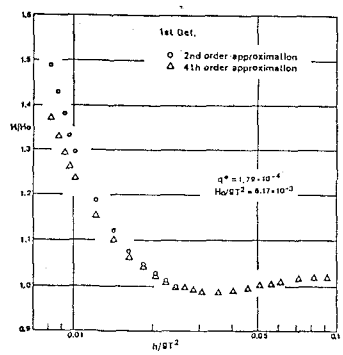


図－2

式（4）と式（5）を比較すると、式（4）の$\cosh^8 kh$ の符号が異なっている。従ってSkjelbreia & Hendricksonによる波速の四次近似解はこの点に誤りがあると思われる。

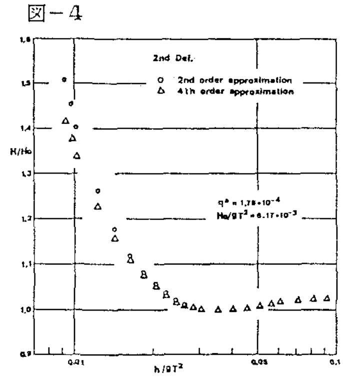
4　Energyflux法による浅水変形の理論解

著者らは、浅水変形の理論解を求めるに当たり、Stokes 波の四次近似解を用いていたが、その中で波速のみは二次近似解であった。本研究では、波速の四次近似解が正しく求められたので、波速と四次近似解を用いた場合の浅水変形の理論解を求め従来のものと比較する。それらの結果を右の図に示す。波速変化に於ては、第一・第二定義とも、h/gT^2 が大きい所ではほぼ同一の値を示し、h/gT^2 が小さい所では波速の四次近似が若干大きい値を示す。逆に波高変化では、h/gT^2 が小さい所では波速の四次近似が小さい値を示している。



図－4

以上のように本研究では、波速の四次近似解を計算する事ができた。又、四次の項は、水深が浅い所でのみ有意な値を持つことが明らかとなった。



図－5

＜参考文献＞

1)堺・佐伯・尾崎：一様流を伴う有限振幅波理論の適用性、第30回海講(1983)　2)Skjelbreia,L. & Hendrickson,J.A.:Fifth order gravity wave theory 、Proc.7th Conf.Coastal Eng.Vol.2(1961)　3)Y.Tsuchiya & M.Yamaguchi :Some considerations on water particle velocities of finity amplitude wave theories、Coastal Eng.Vol. 15(1972)