幾何学的非線形性を考慮した有限要素解の収束に対する数値的検討

東北大学　正　○　岩　熊　哲　夫
東北大学　正　　　倉　西　　　茂

1．まえがき

幾何学的非線形性を考慮して有限要素法を定式化する際には、いわゆる『剛体変位の除去』といわれる手法を用いるのが普通である。この方法は、物体の変形は実際の純変形と回転との成分に分解できるという極分解の定理に基いており、その定式化において必ずしも何らかの変分原理を用いているとは限らない。したがって、その有限要素解の厳密解への収束をエネルギー的に証明できない場合がある。ここでは、この『剛体変位の除去』の手法を用いて定式化した、梁に対するひとつの有限要素解の厳密解への収束状況を数値的に考察する。

2．剛性方程式

図1に示した様なつりあい状態にあるひとつの要素の変形を考えると、両節点の相対変位、たとえば（$\lambda_2 - \lambda_1$）などの量は要素長ℓを小さくすることによって、絶対変位に対して充分微小にできる。したがって図中の$\xi-\eta$座標系で、この相対変位に対する局所的な剛性方程式を微小変位理論のそれで表わすことができると考える。したがって、全体座標系での剛性方程式を求めるには節点1での回転量λ_1に関する座標変換行列を用いて表わせる。

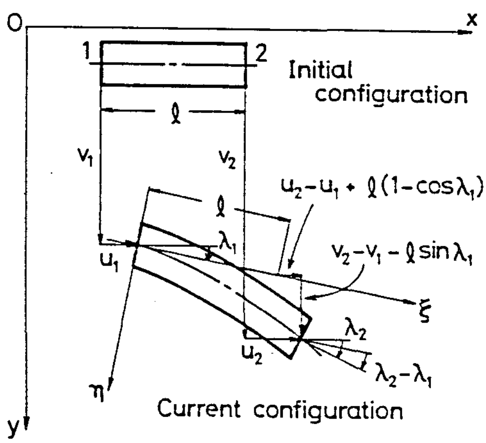

図1．一有限要素の変形

2．エラスティカ

まず、せん断変形を考慮しない場合で解の収束を観察する。図2に厳密解のわかっている2例に対し、有限要素解の絶対誤差の変化を示した。図中、白ぬきの丸は普通の梁の剛性行列を用いた場合であり、黒丸はいわゆる幾何剛性を含めた場合を示している。どちらの例でも幾何剛性を用いた方が良い近似度でしかも早い収束を示している。実線は5点を最小自乗法で結んだもので、幾何剛性を用いたものの方が他方の約2倍の勾配を持ち、その勾配は、誤差が要素数の自乗に反比例していることを示している。ただし、有限要素解は、充分長い梁（細長比が 10^6）に対する解である。

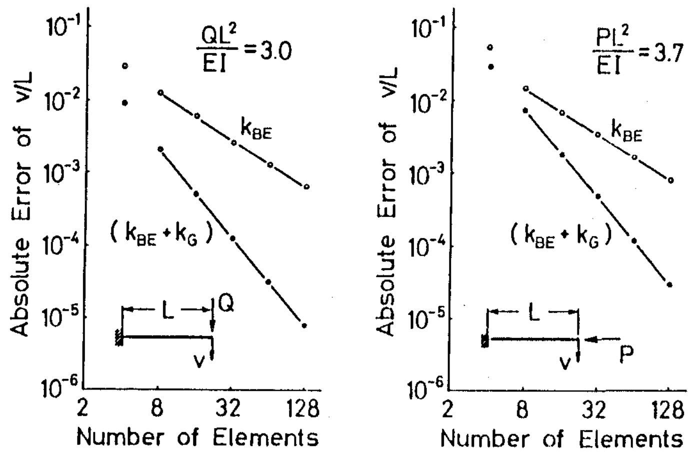

図2．エラスティカの解に対する有限要素解の収束状況
載荷点のたわみと要素数の関係

3．せん断変形を考慮した場合

図3・4に、エラスティカと同様の問題に対する比較的短い梁の解の性質を、載荷点の無次元化されたたわみと要素数の関係で示した。図中、αはせん断変形の影響を表わすパラメータで　α＝E／GK、　βは β＝1／細長比　で定義される。ここに、Eはヤング率、Gはせん断弾性係数で、Kはせん断応力分布の補正係数である。したがって、かなり非現実的な細長比に対する結果であるが、これは以下に述べる各理論解間の差を明確にするために、その様な値を用いた。実線は、ティモシェンコ梁の幾何剛性に相当する剛性行列を用いた場合で、破線は普通のティモシェンコ梁の剛性行列を用いた場合の結果である。２つの有限要素解がそれぞれ異なる解に収束していることがわかる。図の右に並べた線が、それぞれの理論に基き数値積分によって得られた解である。Ａ，Ｂ及びＣは参考文献の中で定義された第一次近似理論によるもので、その内Ｂは軸の伸びに関する高次の非線形項を無視した場合で、Ｃはせん断変形と伸びに関する高次の非線形項を無視した場合の解である。また、Ｄ，Ｅ及びＦは第二次近似理論によるもので、これも同様にＥが伸びを、Ｆが伸びとせん断変形の高次非線形項を無視した場合の解を示している。近似理論Ｃで柱の弾性座屈解析をすると、得られる座屈荷重はオイラー荷重となるため、この理論はせん断変形の影響を正しくは反映していないと考えられる。一方、理論Ｅによる座屈荷重はエンゲッサーの公式に一致する。参考文献にも述べた様に、より基本的なアプローチによって得られる座屈荷重はエンゲッサーの荷重であることを考慮すると、せん断変形を考慮した梁の有限要素解を求める際には、幾何剛性を用いる必要があると考えられる。

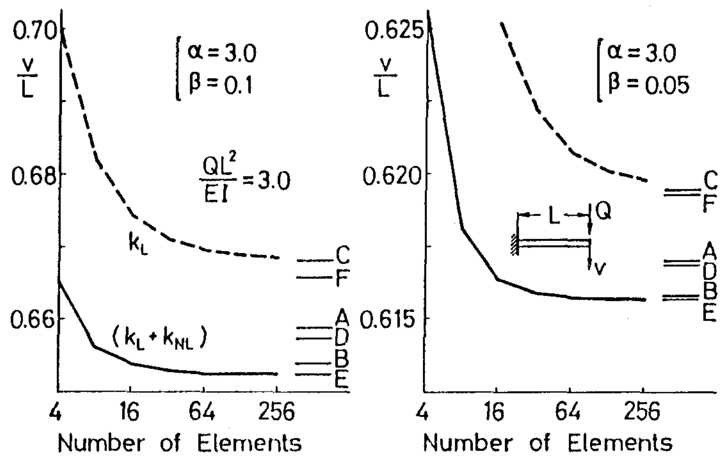

図3．せん断変形を考慮した梁理論に基く数値積分解と有限要素解の収束状況

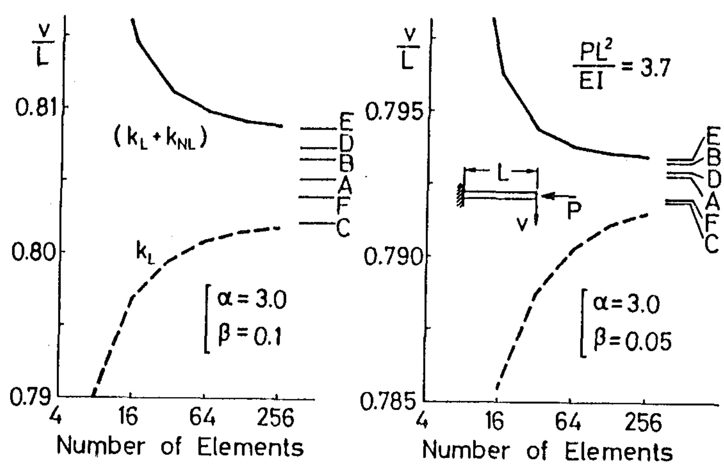

図4．せん断変形を考慮した梁理論に基く数値積分解と有限要素解の収束状況

4．結論

実用上は問題が無いが、せん断変形を考慮した梁の有限要素解を正しく求めるには、幾何剛性行列を用いなければならないことが明らかになった。

[参考文献]

岩熊・倉西：はり理論におけるせん断変形の影響、土木学会論文報告集、No.344/I-1、1984.