境界要素法による変断面連続ばりの解析について

岩手大学工学部　正会員　○出戸　秀明
岩手大学工学部　正会員　　宮本　裕
岩手大学工学部　正会員　　岩崎　正二

1．ま え が き

はりの微分方程式を解く方法のひとつとして、無限長はりの静的曲げ問題の基本解を用いた、境界積分方程式による手法がある。前回の報告ではこの手法により、基本解が未知の変断面ばりの解法として、等断面ばりの基本解を用いたモデルの離散化による数値解法について述べているが、本報告では、この数値解法の適用による２径間連続変断面ばりの解法を示し、結果が厳密解と一致することを確めている。

2．解 析 理 論

変断面ばりに分布荷重 $q(x)$ が作用するときの微分方程式は、式(1)で与えられる。

$$E_0I_0\frac{d^2}{dx^2}\left[\alpha(x)\frac{d^2w(x)}{dx^2}\right]=q(x) \qquad \begin{array}{l} E_0I_0：\text{ある基準点での曲げ剛性} \\ \alpha(x)：\text{曲げ剛性の変化を表わす関数}\end{array} \qquad \text{——— (1)}$$

また、等断面はりの基本解 $w_0^*(x,y)$ は、式(2)で定義される。

$$E_0I_0\frac{d^4w_0^*(x,y)}{dx^4}=\delta(x-y) \qquad \delta：\text{デルタ関数} \qquad \text{———(2)}$$

式(1)の両辺に等断面はりの基本解 $w_0^*(x,y)$ をかけスパン $a-b$ にわたって積分し、$w(x)$ の微係数がとれるまで部分積分を繰り返し、デルタ関数の性質を考慮すれば 式(3)が得られる。

$$\alpha(y)w(y)=\left[Q(x)w_0^*(x,y)-M(x)\theta_0^*(x,y)+\theta(x)\alpha(x)M_0^*(x,y)-w(x)\left\{\frac{d\alpha(x)}{dx}w_0^*(x,y)+\alpha(x)\cdot Q_0^*(x,y)\right\}\right]_{x=a}^{x=b}+\int_a^b q(x)w_0^*(x,y)\,dx+\int_a^b w(x)\left[\frac{d}{dx}\left\{\frac{d\alpha(x)}{dx}M_0^*(x,y)\right\}+\frac{d\alpha(x)}{dx}Q_0^*(x,y)\right]dx \qquad \text{——— (3)}$$

ただし、
$$\theta(x)=\frac{dw(x)}{dx},\ M(x)=-E_0I_0\alpha(x)\frac{d^2w(x)}{dx^2},\ Q(x)=-E_0I_0\frac{d}{dx}\left[\alpha(x)\frac{d^2w(x)}{dx^2}\right],$$
$$\theta_0^*(x,y)=\frac{dw_0^*(x,y)}{dx},\ M_0^*(x,y)=-E_0I_0\frac{d^2w_0^*(x,y)}{dx^2},\ Q_0^*(x,y)=-E_0I_0\frac{d^3w_0^*(x,y)}{dx^3}$$

本来の基本解を用いた式では境界量だけが未知量となるが、ここでは等断面はりの基本解を用いたために、式(3)右辺最後の積分項が未知量として現われ、式(3)，及び 式(3)を y について微分した式において、$y=a+\varepsilon$，　$y=b-\varepsilon$（ ε は微小な正定数 ）としたときの　$\varepsilon\to 0$ の極限を考えることにより得られる４本の方程式だけでは解けない。

そこで、領域 $a\leqq x\leqq b$ を n 分割し、たわみを Gauss の積分公式により近似すると、式(3)右辺最後の積分項は、

$$G(y)=\int_a^b w(x)\frac{d}{dx}\left\{\frac{d\alpha(x)}{dx}M_0^*(x,y)\right\}+\frac{d\alpha(x)}{dx}Q_0^*(x,y)$$
$$=C_{i\cdot1}w_1+C_{i\cdot2}w_2+C_{i\cdot3}w_3+\cdots\cdots+C_{i\cdot n+1}w_{n+1} \quad (i=1,2,3,\cdots\cdots,n+1)$$

ただし、$w_1\sim w_{n+1}$ は分割点（境界点も含む）でのたわみ。

これを式(3)に戻し、分割点（境界点も含む）での式に表わすと

$$\alpha_i w_i=A_{i\cdot1}Q(b)+A_{i\cdot2}M(b)+A_{i\cdot3}\theta(b)+A_{i\cdot4}w(b)+B_{i\cdot1}Q(a)+B_{i\cdot2}M(a)+B_{i\cdot3}\theta(a)$$
$$+B_{i\cdot4}w(a)+q_i+C_{i\cdot1}w_1+C_{i\cdot2}w_2+C_{i\cdot3}w_3+\cdots\cdots+C_{i\cdot n+1}w_{n+1} \quad (i=1,2,3,\cdots\cdots,n+1)$$

ただし、A_{ij}, B_{ij} は分割点における式の境界量にかかる基本解の値、q_i は荷重項。また、$w(a)=w_1, w(b)=w_{n+1}$。

これら $n+1$ 本の式に、式(3)を y について微分した式より導かれる境界における２本の式を加え、マトリックス式に直し整理して 式(4)を得る。

$$(G\ ,\ H)\{w_1,w_2,w_3,\cdots\cdots,w_{n+1},Q(b),M(b),\theta(b),Q(a),M(a),\theta(a)\}^T$$
$$=-\{q_1,q_2,q_3,\cdots\cdots\cdots,q_{n+3}\}^T \qquad \text{————(4)}$$

ただし、Gは たわみ $w_1\sim w_{n+1}$ にかかる係数行列、Hは境界量にかかる係数行列。

式(4)の未知量のうち境界条件より定まる4個の境界量を除けば残りの未知量が得られ、これにより基本解が未知の変断面はりの問題が解けたことになる。

3．連続ばりの解析

2章で述べた数値解析法を適用し、Fig.-1 に示す分布荷重q(x)の作用する2径間連続変断面ばりの問題を考える。 いま、SPAN-1のn分割を考えるとき、境界条件より、$w(a)=w(b)=0, M(a)=0$を式(4)に代入し式(5)を、次に、SPAN-2についても同様にして、境界条件より、$w(a)=w(b)=0, M(b)=0$を代入し、式(7)を得る。

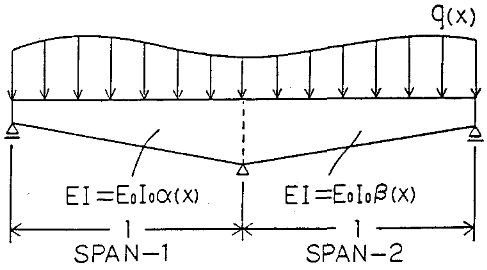

Fig.-1. 2-span Continuous Beam with Varying Cross Section.

$$(G^1, H^1)\{w_2^1, w_3^1, w_4^1, \cdots\cdots, w_n^1, Q(b)^1, M(b)^1, \theta(b)^1, Q(a)^1, \theta(a)^1\}^T$$
$$=-\{q_1^1, q_2^1, q_3^1, \cdots\cdots, q_{n+3}^1\}^T \quad \text{———}(5)$$
$$(G^2, H^2)\{w_2^2, w_3^2, w_4^2, \cdots\cdots, w_n^2, Q(b)^2, \theta(b)^2, Q(a)^2, M(a)^2, \theta(a)^2\}^T$$
$$=-\{q_1^2, q_2^2, q_3^2, \cdots\cdots, q_{n+3}^2\}^T \quad \text{———}(6)$$
$$M(b)^1=M(a)^2 \quad , \quad \theta(b)^1=\theta(a)^2 \quad \text{———}(7)$$

ここで、式(5)、(6)に、SPAN-1，2の連続条件式(7)を加え、

$$\left[\begin{array}{c:c:c:c} G^1 & 0 & H^1 & 0 \\ \hdashline 0 & G^2 & 0 & H^2 \\ \hdashline 0 & 0 & \begin{matrix}0\,1\,0\,0\,0 \\ 0\,0\,1\,0\,0\end{matrix} & \begin{matrix}0\,0\,0\,{-1}\,0 \\ 0\,0\,0\,0\,{-1}\end{matrix} \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} w^1 \\ \hdashline w^2 \\ \hdashline X^1 \\ \hdashline X^2 \end{array}\right\} = -\left\{\begin{array}{c} q^1 \\ \hdashline q^2 \\ \hdashline 0 \\ 0 \end{array}\right\} \quad \text{———}(8)$$

式(8)より2径間連続変断面ばりの問題が解けることになる。

Table-1. Result of Culculation

w_2, w_{12}	2.23446	$\theta_1, -\theta_{13}$	1.47828
	2.23435		1.48833
w_3, w_{11}	3.42988	θ_7	0.00000
	3.42975		0.00000
w_4, w_{10}	3.30965	$-M_7$	1.37101
	3.30956		1.37100
w_5, w_9	2.17708	$Q_1, -Q_{13}$	3.62899
	2.17702		3.62900
w_6, w_8	0.74008	Q_7	6.37101
	0.74004		6.37100

$w: 10^{-3}\cdot q\ell^4/E_0I_0$　　$M: 10^{-1}\cdot q\ell^2$
$\theta: 10^{-2}\cdot q\ell^3/E_0I_0$　　$Q: 10^{-1}\cdot q\ell$

4．数値解析例

数値計算は等分布荷重の作用する単純支持の2径間連続ばりで、 $\alpha(x)=1+m(x/\ell)$，$\beta(x)=1+m(1-x/\ell)$（mは任意）として行ない、m＝1.0のはりでスパンℓを6分割としたときの計算結果を Table-1 に示す。 ここで、w_2～w_6, w_8～w_{12}は分割点でのたわみを表わし、w_1, w_7, w_{13}は支点でのたわみでゼロ。$\theta_1, \theta_7, \theta_{13}, Q_1, Q_7, Q_{13}$はそれぞれ支点でのたわみ角とせん断力、$M_7$は中間支点でのモーメントを表わす。 なお個々の値については上段が本手法によるガウスの10点公式を用いたわみを放物線近似したもの、下段は厳密解である。

6．ま と め

Table-1の下段は、$E_xI_x d^2w(x)/dx^2=-M(x)$ より誘導したもので厳密解であるが、これに比べ上段の、等断面ばりの基本解を用いた本手法による結果が十分な精度を持つこと、さらに支点の連続条件を考慮することにより、多径間連続ばりの解析も本手法により可能であることが明らかとなった。

参 考 文 献

1）田中正隆・田中喜久昭：境界要素法－基礎と応用 ，丸善(1982)

2）出戸秀明・宮本 裕・岩崎正二：境界積分方程式によるはりの解法 ,岩手大学工学部研究報告第36巻 (1983)

3）出戸秀明・宮本 裕・岩崎正二：境界積分方程式による変断面はりの解法 ,岩手大学工学部研究報告第37巻 (1984)

4）出戸秀明・宮本 裕・岩崎正二：境界要素法による変断面はりの解法について ,土木学会第39回講演概要集 (1984)

5）登坂宣好・角田和彦：積分方程式法による境界値問題の近似解法 ,日本建築学会論文報告集第329号 (1983)

6）出戸秀明・宮本 裕・岩崎正二：境界積分方程式によるはりの解法について ,第1回境界要素法シンポジウム (1984)