境界要素法による吊橋の解析について

岩手大学工学部　学生員　○小野寺　英　二

岩手大学工学部　正会員　宮　本　　裕

岩手大学工学部　正会員　岩　崎　正　二

1．ま　え　が　き

著者らは、はり及び変断面ばりの微分方程式を解くにあたり境界積分方程式法による解法を幅広く試みている。この方法は、一次元の境界要素法とも考えられる。本論文は、その一つの例として吊橋を取上げ、撓度理論における基礎微分方程式に境界積分方程式法を適用する過程を述べたものである。

2．解　析　理　論

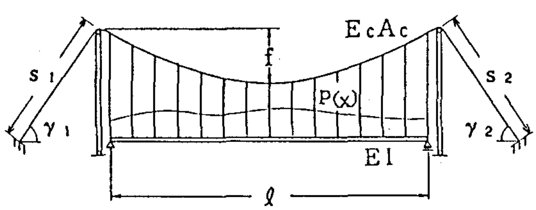
図－1(a)に示す吊橋は、図－1(b)に示すはりと等価である。線形化撓度理論における微分方程式は式(1)で与えられる。また、ケーブル方程式は式(2)で与えられる。

$$EId^4w(x)/dx^4 - Hdw^2(x)/dx^2 - (p(x) + H_p y'') = 0 \quad \cdots(1)$$

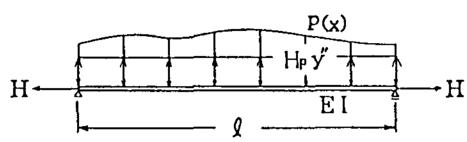
$$H_p \ell_c / E_c A_c + y'' \int_0^{\ell} w(x)\,dx = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

ただし、$y'' = -8f/\ell^2$, $H = H_w + H_p$ (H_w；死荷重によるケーブル水平張力, H_p；活荷重によるケーブル水平張力),

$\ell_c = \ell(1 + 8f^2/\ell^2) + s_1/\cos^2\gamma_1 + s_2/\cos^2\gamma_2$



図－1(a)



図－1(b)

式(1)に対応する基本解$w^*(x,\xi)$は式(3)の解として定義される。

$$EId^4w^*(x,\xi)/dx^4 - Hd^2w^*(x,\xi)/dx^2 = \delta(x,\xi)$$

δ：デルタ関数 ······· (3)

式(1)の両辺に基本解 $w^*(x,\xi)$をかけ、はりのスパンℓにわたって積分する。

$$\int_0^{\ell} \left[EId^4w(x)/dx^4 - Hd^2w(x)/dx^2 - p(x) - H_p y'' \right] w^*(x,\xi)\,dx = 0 \quad \cdots\cdots\cdots(4)$$

式(4)のw(x)の微係数がとれるまで部分積分を繰り返し、式(5)を得る。

$$\Big[-Q(x)w^*(x,\xi) + M(x)\theta^*(x,\xi) - \theta(x)M^*(x,\xi) + w(x)Q^*(x,\xi) \Big]_{x=0}^{x=\ell}$$
$$+ \int_0^{\ell} w(x) \left[EId^4w^*(x,\xi)/dx^4 - Hd^2w^*(x,\xi)/dx^2 \right] dx = \int_0^{\ell} \left[p(x) + H_p y'' \right] w^*(x,\xi)\,dx \quad \cdots\cdots(5)$$

ただし、

$\theta(x) = dw(x)/dx$, $M(x) = -EId^2w(x)/dx^2$, $Q(x) = -EId^3w(x)/dx^3 + Hdw/dx$

$\theta^*(x,\xi) = dw^*(x,\xi)/dx$, $M^*(x,\xi) = -EId^2w^*(x,\xi)/dx^2$, $Q^*(x,\xi) = -EId^3w^*(x,\xi) + Hdw^*(x,\xi)/dx$

ここで式(5)に式(3)を代入し、デルタ関数の性質を考慮すれば、式(6)が得られる。

$$w(\xi) = \Big[Q(x)w^*(x,\xi) - M(x)\theta^*(x,\xi) + \theta(x)M^*(x,\xi) - w(x)Q^*(x,\xi) \Big]_{x=0}^{x=\ell} + \int_0^{\ell} \left[p(x) + H_p y'' \right] w^*(x,\xi)\,dx \quad \cdots\cdots(6)$$

また式(6)をξについて微分して

$$\theta(\xi) = \Big[Q(x)\widehat{w}^*(x,\xi) - M(x)\widehat{\theta}^*(x,\xi) + \theta(x)\widehat{M}^*(x,\xi) - w(x)\widehat{Q}^*(x,\xi) \Big]_{x=0}^{x=\ell} + \int_0^{\ell} \left[p(x) + H_p y'' \right] \widehat{w}^*(x,\xi)\,dx \quad \cdots\cdots(7)$$

ただし、

$\widehat{w}^*(x,\xi) = dw^*(x,\xi)/d\xi$, $\widehat{\theta}^*(x,\xi) = d\theta^*(x,\xi)/d\xi$, $\widehat{M}^*(x,\xi) = dM^*(x,\xi)/d\xi$, $\widehat{Q}^*(x,\xi) = dQ^*(x,\xi)/d\xi$

式(5),(6)において、$\xi = \varepsilon$, $\xi = \ell - \varepsilon$ (εは微小な正定数)としたときの $\varepsilon \to 0$ の極限を考えることにより、境界における4本の方程式、式(8)が得られる。

$$
\begin{bmatrix}
w^*(\ell,0) & -\theta^*(\ell,0) & M^*(\ell,0) & -Q^*(\ell,0) \\
w^*(\ell,\ell) & -\theta^*(\ell,\ell) & M^*(\ell,\ell) & -Q^*(\ell,\ell)-1 \\
\widetilde{w}^*(\ell,0) & -\widetilde{\theta}^*(\ell,0) & \widetilde{M}^*(\ell,0) & -\widetilde{Q}^*(\ell,0) \\
\widetilde{w}^*(\ell,\ell) & -\widetilde{\theta}^*(\ell,\ell) & \widetilde{M}^*(\ell,\ell)-1 & -\widetilde{Q}^*(\ell,\ell)
\end{bmatrix}
\times \{ Q(\ell)\ M(\ell)\ \theta(\ell)\ w(\ell) \}^T
$$

$$
+\begin{bmatrix}
-w^*(0,0) & \theta^*(0,0) & -M^*(0,0) & Q^*(0,0)-1 \\
-w^*(0,\ell) & \theta^*(0,\ell) & -M^*(0,\ell) & Q^*(0,\ell) \\
-\widetilde{w}^*(0,0) & \widetilde{\theta}^*(0,0) & -\widetilde{M}^*(0,0)-1 & \widetilde{Q}^*(0,0) \\
-\widetilde{w}^*(0,\ell) & \widetilde{\theta}^*(0,\ell) & -\widetilde{M}^*(0,\ell) & \widetilde{Q}^*(0,\ell)
\end{bmatrix}
\times \{ Q(0)\ M(0)\ \theta(0)\ w(0) \}^T
$$

$$
= -\{ H_1\ H_2\ H_3\ H_4 \}^T \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (8)
$$

ただし、

$$H_1 = \int_0^\ell [\,p(x)+H_p y''\,]\, w^*(x,0)dx$$

$$H_2 = \int_0^\ell [\,p(x)+H_p y''\,]\, w^*(x,\ell)dx$$

$$H_3 = \int_0^\ell [\,p(x)+H_p y''\,]\, \widetilde{w}^*(x,0)dx$$

$$H_4 = \int_0^\ell [\,p(x)+H_p y''\,]\, \widetilde{w}^*(x,\ell)dx$$

ここで、基本解は以下のようになる。

$w^*(x,\xi)=(\sinh\lambda r/\lambda^3-r/\lambda^2)/2EI$, $\quad \theta^*(x,\xi)=(\cosh\lambda r/\lambda^2-1/\lambda^2)/2EI\cdot \mathrm{sgn}(x,\xi)$

$M^*(x,\xi)=-(\sinh\lambda r/\lambda)/2$, $\quad Q^*(x,\xi)=-1/2\cdot \mathrm{sgn}(x,\xi)$

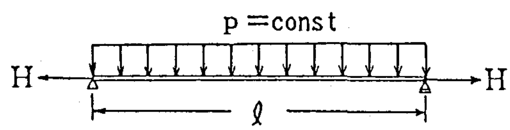
$\widetilde{w}^*(x,\xi)=-(\cosh\lambda r/\lambda^2-1/\lambda^2)/2EI\cdot \mathrm{sgn}(x,\xi)$, $\quad \widetilde{\theta}^*(x,\xi)=-(\sinh\lambda r/\lambda)/2EI$

$\widetilde{M}^*(x,\xi)=\cosh\lambda r/2\cdot \mathrm{sgn}(x,\xi)$, $\quad \widetilde{Q}^*(x,\xi)=0$

ただし、$r=|x-\xi|$, $x>\xi$ のとき $\mathrm{sgn}(x,\xi)=1$, $x<\xi$ のとき $\mathrm{sgn}(x,\xi)=-1$, $\lambda^2=H/EI$

式(8)の8個の境界量のうち、4個については境界条件より定まり、これにより、残り4個の未知量は導かれる。

例として図−2のような、等分布荷重pの載った場合を考える。式(8)において、$p(x)+H_p y''=p$ とし、境界条件より $w(0)=w(\ell)=0$, $M(0)=M(\ell)=$ を代入すると、式(8)は以下のようになる。



図−2

$$
\begin{bmatrix}
K_{11} & K_{12} & 0 & 0 \\
0 & 0 & K_{23} & K_{24} \\
K_{31} & K_{32} & 0 & K_{34} \\
0 & K_{42} & K_{43} & K_{44}
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} Q(\ell) \\ \theta(\ell) \\ Q(0) \\ \theta(0) \end{Bmatrix}
=
\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{Bmatrix}
\quad \cdots (9)
$$

$K_{11}=-K_{23}=(\sinh\lambda\ell/\lambda^3-\ell/\lambda^2)/2EI$

$K_{12}=-K_{24}=-(\sinh\lambda\ell/\lambda)/2$

$K_{31}=K_{43}=-(\cosh\lambda\ell/\lambda^2-1/\lambda^2)/2EI$

$K_{32}=K_{44}=\cosh\lambda\ell/2$, $K_{34}=K_{42}=-1/2$

$F_1=F_2=-p(\cosh\lambda\ell/\lambda^4-\ell^2/2\lambda^2-1/\lambda^4)/2EI$, $\quad F_3=-F_4=p(\sinh\lambda\ell/\lambda^3-\ell/\lambda^2)/2EI$

次に(6)において、$p(x)+H_p y''=p$, $w(0)=w(\ell)=0$, $M(0)=M(\ell)=0$ を代入すると式(10)となる。

$$
\begin{aligned}
w(\xi)=&\,w^*(\ell,\xi)Q(\ell)+M^*(\ell,\xi)\theta(\ell)-w^*(0,\xi)Q(0)-M^*(0,\xi)\theta(0) \\
&+p\{-2/\lambda^4+\cosh\lambda\xi/\lambda^4+\cosh\lambda(\ell-\xi)/\lambda^4-\xi^2/2\lambda^2-(\ell-\xi)^2/2\lambda^2\}/2EI \quad \cdots\cdots (10)
\end{aligned}
$$

等分布荷重の場合、$Q(0)=-Q(\ell)$, $\theta(0)=-\theta(\ell)$, また $p(x)+H_p y''=p$ を考慮して、式(10)を式(2)に代入してH_pについて整理すると式(11)となる。 $\quad H_p=A_0/A_1 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (11)$

$$
\begin{aligned}
A_0=&\,y''\{(\cosh\lambda\ell/\lambda^4-\ell^2/2\lambda^2-1/\lambda^4)/EI\cdot Q_0(0)-(\cosh\lambda\ell/\lambda^2-1/\lambda^2)\cdot\theta_0(0) \\
&-(\sinh\lambda\ell/\lambda^5-\ell/\lambda^4-\ell^3/6\lambda^2)/EI\cdot p(x)\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A_1=&\,\ell_c/E_cA_c+(y'')^2\{-(\cosh\lambda\ell/\lambda^4-\ell^2/2\lambda^2-1/\lambda^4)/EI\cdot Q_1(0)+(\cosh\lambda\ell/\lambda^2-1/\lambda^2)\cdot\theta_1(0) \\
&+(\sinh\lambda\ell/\lambda^5-\ell/\lambda^4-\ell^3/6\lambda^2)/EI\}
\end{aligned}
$$

ただし、$Q(x)=Q_0(x)+H_p y'' Q_1(x)$, $\theta(x)=\theta_0(x)+H_p y''\theta_1(x)$, 〔$Q_0(x)$ $\theta_0(x)$;外力$p(x)$による$Q(x)$ $\theta(x)$, $Q_1(x)$ $\theta_1(x)$;等分布荷重$H_p y''=1$による$Q(x)$ $\theta(x)$〕とした。

実際の解法としては、まずH_pを仮定し式(9)を用いて$Q(0)$, $Q(\ell)$, $\theta(0)$, $\theta(\ell)$を計算してから、式(11)によりH_pを求める。その際、仮定されたH_pと式(9)より求めたH_pは、一致するまで繰り返し計算を行なう。

なを、数値計算例及びその結果については、当日会場にて発表するものと致します。

参考文献

1．田中正隆・田中喜久昭：境界要素法−基礎と応用 ，丸善(1982)

2．出戸秀明・宮本裕・岩崎正二：境界積分方程式によるはりの解法について ，境界要素法研究会主催 第1回境界要素法シンポジウム ，1984年11月